Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 19 giugno 2013

Problema 1

Sia $f(x) = \log x$. Determinare la funzione di condizionamento $C(x; \epsilon)$ del calcolo di $f(x)$ e discutere il condizionamento del calcolo di $f(x)$ per $x = e$.

Problema 2

Determinare la forma di Newton del polinomio che interpola i dati

$$(-1, 0) \quad , \quad (0, 1) \quad , \quad (1, 1)$$

Problema 3

Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = 4 \log x - x$.

(a) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(b) Per ciascun α zero di f, determinare x_0 tale che la successione generata dal metodo di Newton a partire da x_0, ed operando in $\mathbb{R}$, risulti convergente ad α.

Soluzione

Problema 1

Posto $\tilde{x} = (1+\epsilon)x$, per ogni $x \neq 1$ si ha:

$$C(x;\epsilon) = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} = \frac{\log(1+\epsilon)}{\log x}$$

Per $x = e$ si ha $\log x = 1$ e quindi:

$$C(e;\epsilon) = \log(1+\epsilon)$$

Per ϵ piccolo si ha $\log(1+\epsilon) \approx \epsilon$ quindi il calcolo di $f(x)$ per $x = e$ è *ben condizionato.*

Problema 2

Scelta la base di Newton $1, x+1, (x+1)x$, i coefficienti del polinomio interpolante $p(x)$ si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$p(x) = x + 1 - \frac{(x+1)x}{2}$$

Problema 3

Per la funzione f si ha:

$$f'(x) = \frac{4}{x} - 1$$

e

$$f''(x) = -\frac{4}{x^2}$$

La derivata seconda è sempre diversa da zero (negativa), quindi f ha *al più due zeri.* Inoltre:

$$f(1) = -1 < 0 \qquad , \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad f(e) = 4 - e > 0$$

dunque: *f ha due zeri.*

Un intervallo finito che contiene il primo zero α_1 è: $[1, e]$. Un intervallo finito che contiene il secondo zero α_2 si ottiene constatando che $f(10) < 0$, perciò: $\alpha_2 \in [e, 10]$.

Si constata che nell'intervallo $[1, e]$ si ha $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$, dunque il metodo di Newton genera una successione certamente convergente ad α_1 a partire da $x_0 = 1$, e tale successione risulta *crescente* e di *ordine di convergenza due.*

Invece, nell'intervallo $[e, 10]$ la derivata prima di f si annulla (per $x = 4$). Ma si constata che $f(4) > 0$, quindi $\alpha_2 \in (4, 10]$ e su tale intervallo si ha $f''(x) < 0$ e $f'(x) > 0$ dunque il metodo di Newton genera una successione certamente convergente ad α_2 a partire da $x_0 = 10$, e tale successione risulta *decrescente* e di *ordine di convergenza due.*