Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 28 febbraio 2013

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Determinare tutti gli elementi $\xi \in M$ tali che:

$$4 \otimes \xi = 1$$

Problema 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, sia:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ x & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinare gli insiemi:

$$C = \{\, x \in \mathbb{R} \text{ tali che } A(x) \text{ è a predominanza diagonale forte per colonne} \,\}$$
$$R = \{\, x \in \mathbb{R} \text{ tali che } A(x) \text{ è a predominanza diagonale forte per righe} \,\}$$
$$T = \{\, x \in \mathbb{R} \text{ tali che la procedura } \texttt{EG} \text{ è definita in } A(x) \,\}$$

Problema 3

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da: $f(x) = e^x - 2 + x^2$.

(a) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(b) Per ciascun α zero di f, determinare x_0 tale che la successione generata dal metodo di Newton a partire da x_0, ed operando in $\mathbb{R}$, risulti convergente ad α.

Soluzione

Problema 1

Si constata che $4 = 2^3 \cdot 0.100 \in M$ e $1 = 2^1 \cdot 0.100 \in M$. Per definizione, $4 \otimes \xi = \mathrm{rd}(4\xi)$. Posto $x = 4\xi$, si ha:

$$\mathrm{rd}(x) = 1 \quad \text{se e solo se} \quad x \in (2^0 \cdot 0.1111; 2^1 \cdot 0.1001)$$

essendo $2^0 \cdot 0.1111$ il punto medio dell'intervallo di estremi $\pi(1)$, 1 e $2^1 \cdot 0.1001$ il punto medio dell'intervallo di estremi 1, $\sigma(1)$. Ne segue:

$$\tfrac{1}{4}x \in (2^{-2} \cdot 0.1111; 2^{-1} \cdot 0.1001)$$

I numeri di macchina cercati sono dunque quelli inclusi nell'intervallo appena determinato. L'*unico* elemento di M così individuato è: $\xi = 2^{-1} \cdot 0.100 = \frac{1}{4}$.

Problema 2

Per definizione, $A(x)$ è a predominanza diagonale forte *per colonne* se e solo se:

$$2 > 1 + |x| \quad , \quad |-2| > |-1| \quad , \quad 3 > 1$$

ovvero se e solo se $|x| < 1$. Dunque: $C = (-1, 1)$.

Analogamente, $A(x)$ è a predominanza diagonale forte *per righe* se e solo se:

$$2 > 1 \quad , \quad |-2| > 1 \quad , \quad 3 > |-1| + |x|$$

ovvero se e solo se $|x| < 2$. Dunque: $R = (-2, 2)$.

Infine, la procedura `EG` è definita in $A(x)$ se e solo se i determinanti dei primi *due* minori principali di testa sono diversi da zero. In questo caso lo sono per ogni valore di x, dunque $T = \mathbb{R}$.

Problema 3

Per la funzione f si ha:

$$f'(x) = e^x + 2x$$

e

$$f''(x) = e^x + 2$$

La derivata seconda è sempre diversa da zero (positiva), quindi f ha *al più due zeri.* Inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad , \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad f(0) = -1$$

dunque: *f ha due zeri*: uno positivo ed uno negativo.

Un intervallo finito che contiene lo zero negativo α_1 si ottiene constatando che:

$$f(-2) = e^{-2} - 2 + 4 > 0 \quad \text{e} \quad f(-1) = e^{-1} - 2 + 1 < 0$$

perciò: $\alpha_1 \in [-2, -1]$. Analogamente, un intervallo finito che contiene lo zero positivo α_2 si ottiene constatando che:

$$f(0) = -1 < 0 \quad \text{e} \quad f(1) = e - 2 + 1 > 0$$

perciò: $\alpha_2 \in [0, 1]$.

Per approssimare α_2 si constata che nell'intervallo $[0, 1]$ si ha $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$, dunque il metodo di Newton genera una successione certamente convergente ad α_2 a partire da $x_0 = 1$, e tale successione risulta *decrescente* e di *ordine di convergenza due*.

Per approssimare α_1 si constata che nell'intervallo $[-2, -1]$ si ha $f''(x) > 0$ e $f'(x) < 0$ (infatti, essendo $f''(x) > 0$, la funzione $f'(x)$ risulta crescente, e $f'(-1) = e^{-1} - 2 < 0$) dunque il metodo di Newton genera una successione certamente convergente ad α_1 a partire da $x_0 = -2$, e tale successione risulta *crescente* e di *ordine di convergenza due*.