Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 5 febbraio 2013

Problema 1

Per approssimare i valori della funzione:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

si utilizza la funzione:

$$\phi(\xi) = \mathtt{SEN}(\xi) \oslash \mathtt{COS}(\xi)$$

Determinare la funzione di stabilità che esprime l'errore algoritmico relativo ϵ_a commesso nell'approssimazione, supponendo che:

$$\mathtt{SEN}(\xi) = \operatorname{rd}(\operatorname{sen} \xi) \quad \text{e} \quad \mathtt{COS}(\xi) = \operatorname{rd}(\cos \xi)$$

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione LR di A ed utilizzarla per decidere se A sia definita positiva.

Problema 3

Determinare tutti gli elementi $p(x) \in P_2(\mathbb{R})$ che meglio approssimano i dati:

$$(-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, 1)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Per le ipotesi, per ogni numero di macchina ξ esistono numeri reali ϵ_1 e ϵ_2 tali che:

$$\mathtt{SEN}(\xi) = (1+\epsilon_1)\,\mathrm{sen}\,\xi \quad , \quad \mathtt{COS}(\xi) = (1+\epsilon_2)\cos\xi$$

Per la definizione di $\oslash$ esiste inoltre un numero reale ϵ_3 tale che:

$$\mathtt{SEN}(\xi) \oslash \mathtt{COS}(\xi) = \frac{\mathrm{sen}\,\xi}{\cos\xi}\,\frac{(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_3)}{1+\epsilon_2}$$

Allora si ha:

$$\epsilon_a = S(\xi;\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3) = \frac{(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_3)}{1+\epsilon_2} - 1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_3}{1+\epsilon_2}$$

Problema 2

Si constata immediatamente che i primi tre minori principali di testa di A hanno determinante non zero, dunque `EG` è definita in A che perciò ammette *una sola* fattorizzazione LR. Applicando, ad esempio, la procedura `EG`, si ottiene:

$$A = SD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Essendo $d_{33} < 0$, la matrice A (simmetrica) risulta *non* definita positiva.

Problema 3

L'elemento cercato ha la forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. I coefficienti a_0, a_1 e a_2 si devono determinare in modo che la quantità:

$$F(a_0,a_1,a_2) = (p(-1)-1)^2 + (p(0)+1)^2 + (p(0)-0)^2 + (p(0)-1)^2 + (p(1)-1)^2$$

assuma valore minimo.

Questo problema equivale a determinare la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

originato imponendo a $p(x)$ di interpolare i dati.

La soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati si ottiene risolvendo il sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = 1$$

L'elemento richiesto (unico: il sistema da risolvere nel senso dei minimi quadrati ha colonne linearmente indipendenti) è quindi: $p(x) = x^2$.