**Dipartimento di Matematica Applicata**
**« Ulisse Dini »**

# Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 16 gennaio 2013

Problema 1

Sia $M = F(2,4)$. Calcolare: $\mathrm{rd}(\frac{7}{6})$.

Problema 2

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione LR di $A$ ed utilizzarla per calcolare $A^{-1}$. Infine, calcolare il numero di condizionamento di $A$ in norma *uno*.

Problema 3

Determinare tutti gli elementi $p(x) \in P_1(\mathbb{R})$ che verificano le condizioni:

$$p(0) + p(1) = 2 \quad , \quad \frac{dp}{dx}(0) = 0$$

## Soluzione

### Problema 1

Poiché

$$2^0 < x \leqslant 2^1$$

l'esponente di $x$ in base due è 1, e per la frazione si ha:

$$g = \tfrac{7}{12} = 0.100101\ldots$$

Ne segue che $x \notin F(2,4)$.

Per determinare l'arrotondato di $x$ si considerano i due elementi di $F(2,4)$ ad esso adiacenti:

$$2^1 \cdot 0.1001 < x < 2^1 \cdot 0.1010$$

Poiché $x$ risulta più vicino al primo dei due (il punto medio tra i due è $2^1 \cdot 0.10011 > x$), si ha: $\mathrm{rd}(x) = 2^1 \cdot 0.1001 = \frac{9}{8}$.

### Problema 2

Si constata immediatamente che i primi due minori principali di testa di $A$ hanno determinante non zero, dunque `EG` è definita in $A$ che quindi ammette *una sola* fattorizzazione LR. Applicando, ad esempio, la procedura `EG`, si ottiene:

$$A = SD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice $D$ risulta invertibile, dunque anche $A$ lo è, e: $A^{-1} = D^{-1}S^{-1}$. Inoltre:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Infine, essendo: $\|A\|_1 = 2$ e $\|A^{-1}\|_1 = 2$ si ha: $c_1(A) = 2$.

### Problema 3

Si cercano $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tali che, posto $p(x) = a_0 + a_1 x$ si abbia:

$$p(0) + p(1) = 2\,a_0 + a_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad \frac{dp}{dx}(0) = a_1 = 0$$

Le due condizioni determinano univocamente il valore dei coefficienti: $a_0 = 1, a_1 = 0$. Dunque, l'*unico* elemento di $P_1(\mathbb{R})$ che verifica le condizioni è: $p(x) = 1$.