Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 18 gennaio 2012

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Determinare tutti gli elementi $\xi \in M$ tali che $\xi \oplus 1 > 1$.

Problema 2

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di A ed utilizzarla per risolvere il sistema $Ax = b$.

Problema 3

Determinare la forma di Newton del polinomio che interpola i dati $(0,0), (1,1), (2,1)$.

Soluzione

Problema 1

Per definizione, $\xi \oplus 1 = \mathrm{rd}(\xi + 1)$. Posto $x = \xi + 1$, si ha:

$$\mathrm{rd}(x) > 1 \quad \text{se e solo se} \quad x > 2^1 \cdot 0.1001$$

essendo $2^1 \cdot 0.1001$ il punto medio dell'intervallo di estremi 1, $\sigma(1)$. Inoltre:

$$x > 2^1 \cdot 0.1001 \Rightarrow \xi > 2^1 \cdot 0.1001 - 1$$

I numeri di macchina cercati sono dunque quelli tali che:

$$\xi > 2^{-2} \cdot 0.100$$

Problema 2

Una fattorizzazione QR di A si può determinare in due passi.

(1) Si constata che le colonne di A sono linearmente indipendenti, quindi esistono certamente colonne $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ ortogonali rispetto al prodotto scalare canonico e $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23} \in \mathbb{R}$ tali che

$$A = (w_1, w_2, w_3) \begin{bmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dall'uguaglianza letta per colonne si ricava che, dette a_1, a_2, a_3 le colonne di A:

$$a_1 = w_1 \quad , \quad a_2 = w_1\theta_{12} + w_2 \quad , \quad a_3 = w_1\theta_{13} + w_2\theta_{23} + w_3$$

Dalla prima relazione si ricava w_1, dalla seconda si ricavano θ_{12} (moltiplicando scalarmente l'uguaglianza per w_1) e poi w_2, dalla terza si ricavano infine θ_{13} (moltiplicando scalarmente per w_1), θ_{23} (moltiplicando scalarmente per w_2) e poi w_3 ottenendo:

$$A = \Omega\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Si ricavano i fattori richiesti constatando che le colonne di Ω sono ortogonali:

$$U = \Omega \quad , \quad T = \Theta$$

La fattorizzazione ottenuta si utilizza per la soluzione del sistema $Ax = b$ ponendo $c = U^{\mathsf{T}}b$ e risolvendo (col procedimento di sostituzione all'indietro) il sistema $Tx = c$, equivalente al sistema $Ax = b$. Si ottiene la soluzione:

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Scelta come base di Newton: $1, x, x(x-1)$ (ci si arresta al grado *due* perché si devono interpolare *tre* dati), imponendo le condizioni di interpolazione si ottiene il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Risolto il sistema si ha:

$$p(x) = b_0 + b_1\,x + b_2\,x(x-1) = x - \tfrac{1}{2}x(x-1)$$

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 7 febbraio 2012

Problema 1

Sia $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Determinare la funzione di stabilità relativa all'algoritmo:

$$\phi(\xi) = \xi \otimes \mathtt{SEN}(\xi)$$

utilizzato per approssimare f.

Problema 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, sia

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$$

Discutere, per ogni $x \in \mathbb{R}$, l'esistenza ed unicità della fattorizzazione LR di $A(x)$.

Problema 3

Determinare il polinomio di grado al più uno che meglio approssima i dati $(0,0), (1,1), (2,1)$ nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

La funzione di stabilità richiesta esprime l'errore algoritmico in termini dell'argomento ξ e degli errori algoritmici delle singole operazioni elementari. L'errore algoritmico è, per definizione, il numero reale ϵ_a tale che:

$$\phi(\xi) = (1 + \epsilon_a) f(\xi)$$

Introducendo l'errore algoritmico di ciascuna operazione elementare si ha:

$$\phi(\xi) = \xi \otimes [(1 + \epsilon_{1a}) \operatorname{sen} \xi] = (1 + \epsilon_{2a})(1 + \epsilon_{1a}) \xi \operatorname{sen} \xi$$

Perciò:

$$\epsilon_a = \epsilon_{1a} + \epsilon_{2a} + \epsilon_{1a}\epsilon_{2a}$$

Problema 2

Si ha: $\det A[1] = 1$ e $\det A[2] = x$, e la procedura `EG` termina su $A(x)$ per ogni $x \neq 0$. Dunque $A(x)$ ammette fattorizzazione LR (unica) per ogni $x \neq 0$. Si constata infine (utilizzando la procedura di Doolittle) che $A(0)$ non ammette fattorizzazione LR.

Problema 3

L'elemento cercato ha la forma $p(t) = a_0 + a_1 t$. I coefficienti a_0 e a_1 si devono determinare in modo che la quantità

$$F(a_0, a_1) = (p(0) - 0)^2 + (p(1) - 1)^2 + (p(2) - 1)^2$$

assuma valore minimo.

Questo problema equivale a determinare la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

originato imponendo a $p(t)$ di interpolare i dati.

La soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati si ottiene risolvendo il sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$a_0 = \frac{1}{6} \quad , \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

L'elemento richiesto è quindi: $p(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} t$.

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 21 febbraio 2012

Problema 1

Sia $M = F(2,4)$. Determinare l'arrotondato di $x = \frac{1}{18}$ in M.

Problema 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, sia

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 1 \\ x & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, decidere se $A(x)$ ammette fattorizzazione LR, e se sia definita positiva.

Problema 3

Sia $h(x) = -x(x-2)$. Determinare i punti uniti di h e, per ciascuno di essi, decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione.

Soluzione

Problema 1

Poiché

$$\frac{1}{32} < x \leqslant \frac{1}{16}$$

l'esponente di x in base due è -4, e per la frazione si ha:

$$g = \tfrac{8}{9} = 0.11100\ldots$$

Ne segue che $x \notin F(2,4)$.

Per determinare l'arrotondato di x si considerano i due elementi di $F(2,4)$ ad esso adiacenti:

$$2^{-4} \cdot 0.1110 < x < 2^{-4} \cdot 0.1111$$

Pioché x risulta più vicino al primo dei due, si ha: $\mathrm{rd}(x) = 2^{-4} \cdot 0.1110$.

Problema 2

Poichè per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $\det A[1] \neq 0$ e $\det A[2] \neq 0$. la procedura `EG` termina su $A(x)$ per ogni x, dunque $A(x)$ ammette fattorizzazione LR (unica) per ogni x.

Il fattore destro risulta:

$$D(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - x^2 \end{bmatrix}$$

e la matrice risulta definita positiva per tutti e soli gli x tali che:

$$\frac{1}{2} - x^2 > 0$$

ovvero per:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Problema 3

I punti uniti di h sono tutti e soli gli x tali che:

$$x = h(x) = -x(x-2)$$

e risulta: $x = 0$ e $x = 1$.

Poichè $h'(0) = 2$, non può esistere un intervallo che verifica le prime due ipotesi del Teorema di convergenza locale. Se ne deduce che il metodo iterativo definito da h *non è* utilizzabile per approssimare il primo punto unito.

Per il secondo si ha: $h'(1) = 0$ e quindi esiste un intervallo che verifica le prime due ipotesi del Teorema di convergenza locale. Se ne deduce che il metodo iterativo definito da h *è* utilizzabile per approssimare il primo punto unito (e che le successioni generate avranno ordine di convergenza almeno due).

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 12 aprile 2012

Problema 1

Sia $M = F(2,4)$. Determinare l'arrotondato di $x = \frac{3}{15}$ in M.

Problema 2

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Determinare $\texttt{EGP}(A)$.

Problema 3

Determinare la forma di Lagrange del polinomio che interpola i dati $(0,1), (1,0), (2,0)$.

Soluzione

Problema 1

Poiché:

$$\tfrac{1}{8} < x \leqslant \tfrac{1}{4}$$

l'esponente di x in base due è -2, e per la frazione si ha:

$$g = \tfrac{12}{15} = 0.11001\ldots$$

Ne segue che $x \notin F(2,4)$.

Per determinare l'arrotondato di x si considerano i due elementi di $F(2,4)$ ad esso adiacenti:

$$2^{-2} \cdot 0.1100 < x < 2^{-2} \cdot 0.1101$$

Piochè x risulta più vicino al secondo dei due, si ha: $\mathrm{rd}(x) = 2^{-2} \cdot 0.1101$.

Problema 2

Poiché $a_{11} = 0$, è necessario permutare le righe per procedere con l'eliminazione. Detta P_{13} la matrice di permutazione che scambia le righe prima e terza, posto $A_2 = P_{13}A$, la procedura di eliminazione procede ponendo:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

e $A_3 = H_1 A_2$. Poiché A_3 risulta triangolare inferiore, si ha $D = A_3$. Inoltre:

$$D = H_1 P_{13} A \quad \text{ovvero} \quad H_1^{-1} D = P_{13} A$$

e quindi:

$$\mathtt{EGP}(A) = (P_{13}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix})$$

Problema 3

La base di Lagrange risulta (si devono interpolare tre dati, quindi la base ha tre elementi):

$$\ell_{02}(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \quad , \quad \ell_{12}(x) = \frac{x(x-2)}{-1} \quad , \quad \ell_{22}(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

Quindi, ricordando che nel caso della forma di Lagrange i coefficienti della combinazione lineare degli elementi della base che genera il polinomio interpolante $p(x)$ sono i valori da interpolare, si ha:

$$p(x) = 1 \cdot \ell_{20}(x) = \tfrac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 13 giugno 2012

Problema 1

Sia $M = F(2,2)$. Determinare tutti gli elementi $\xi \in M$ tali che $\xi \otimes 2 = 6$.

Problema 2

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Applicare ad A la procedura `EGP` ed utilizzare la fattorizzazione ottenuta per risolvere il sistema $Ax = b$.

Problema 3

Determinare la forma di Lagrange del polinomio che interpola i dati $(0,0), (1,1), (2,1)$.

Soluzione

Problema 1

Si constata che $2 = 2^2 \cdot 0.10 \in M$ e $6 = 2^3 \cdot 0.11 \in M$. Per definizione, $\xi \otimes 2 = \mathrm{rd}(2\xi)$. Posto $x = 2\xi$, si ha:

$$\mathrm{rd}(x) = 6 \quad \text{se e solo se} \quad x \in (2^3 \cdot 0.101; 2^3 \cdot 0.111)$$

essendo $2^3 \cdot 0.101$ il punto medio dell'intervallo di estremi $\pi(6)$, 6 e $2^3 \cdot 0.111$ il punto medio dell'intervallo di estremi 6, $\sigma(6)$. Ne segue:

$$\tfrac{1}{2}x \in (2^2 \cdot 0.101; 2^2 \cdot 0.111)$$

I numeri di macchina cercati sono dunque quelli inclusi nell'intervallo appena determinato. L'unico elemento di M così individuato è: $\xi = 2^2 \cdot 0.11 = 3$.

Problema 2

Essendo $a_{11} = 0$, occorre utilizzare una matrice di permutazione per poter poi eseguire il primo passo dell'eliminazione di Gauss. Si constata che utilizzando la matrice P_{12}, che permuta le righe 1 e 2, si ottiene la matrice $P_{12}A$ per la quale il primo passo della procedura `EG` termina utilizzando $H_1 = I$ (gli elementi al di sotto della diagonale nella prima colonna della matrice $P_{12}A$ sono già zero). Posto quindi $A^{(2)} = P_{12}A$ si verifica che $a_{22}^{(2)} = 0$ e quindi anche per il secondo passo della procedura occorre permutare le righe. Si constata che utilizzando la matrice P_{23}, che permuta le righe 2 e 3, si ottiene la matrice $P_{32}A^{(2)}$ per la quale il secondo passo della procedura `EG` termina utilizzando $H_2 = I$ (gli elementi al di sotto della diagonale nella seconda colonna della matrice $P_{23}A^{(2)}$ sono già zero). Posto $A^{(3)} = P_{23}A^{(2)}$, la procedura termina e si ha:

$$\mathrm{EGP}(A) = (\, P, S, D \,)$$

con:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad S = I \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema $Ax = b$ è equivalente al sistema $PAx = Pb$ che si riscrive: $SDx = Pb$. La soluzione del sistema (unica, essendo $\det D \neq 0$) si ottiene risolvendo, nell'ordine, i due sistemi $Sc = Pb$ (in questo caso la matrice del sistema è la matrice identica, dunque la soluzione del sistema è banale) e $Dx = c$ (con matrice triangolare superiore, e quindi risolubile con la procedura di *sostituzione all'indietro*). Si ottiene:

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Scelta come base di Lagrange: $\ell_{20}(x), \ell_{21}(x), \ell_{22}(x)$ con

$$\ell_{20}(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \quad , \quad \ell_{21}(x) = \frac{x(x-2)}{-1} \quad , \quad \ell_{22}(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

(la base ha *tre* elementi perché si devono interpolare *tre* dati), si ottiene:

$$p(x) = \ell_{21}(x) + \ell_{22}(x)$$

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 3 luglio 2012

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Determinare il più piccolo elemento $\xi \in M$ maggiore di $\frac{1}{3}$.

Problema 2

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Decidere se A sia definita positiva e risolvere il sistema $Ax = b$.

Problema 3

Determinare il polinomio di grado al più uno che meglio approssima i dati $(0,0), (1,1), (2,1)$ nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Poiché $\frac{1}{3} \notin M$, detti ξ_1 e ξ_2 gli elementi di M adiacenti ad $\frac{1}{3}$, l'elemento cercato è ξ_2.

Si ha:

$$\tfrac{1}{3} = 2^{-1} \cdot 0.101010\cdots$$

e quindi:

$$\xi_1 = 2^{-1} \cdot 0.101 \quad , \quad \xi_2 = 2^{-1} \cdot 0.110$$

L'elemento cercato è dunque:

$$\xi_2 = 2^{-1} \cdot 0.110$$

Problema 2

La procedura `EG` termina su A e si ottiene:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Essendo $d_{22} < 0$, la matrice A risulta *non* definita positiva.

Per risolvere il sistema $Ax = b$ si utilizza la fattorizzazione LR di A appena determinata. Si risolve prima il sistema $Sc = b$ utilizzando la procedura di sostituzione in avanti (la matrice S è triangolare inferiore) poi si ottiene la soluzione del sistema iniziale risolvendo il sistema $Dx = c$ con la procedura di sostituzione all'indietro (la matrice D è triangolare superiore).

Si ha:

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problema 3

L'elemento cercato ha la forma $p(t) = a_0 + a_1 t$. I coefficienti a_0 e a_1 si devono determinare in modo che la quantità

$$F(a_0, a_1) = (p(0) - 0)^2 + (p(1) - 1)^2 + (p(2) - 1)^2$$

assuma valore minimo.

Questo problema equivale a determinare la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

originato imponendo a $p(t)$ di interpolare i dati.

La soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati si ottiene risolvendo il sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$a_0 = \frac{1}{6} \quad , \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

L'elemento richiesto è quindi: $p(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}t$.

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 24 luglio 2012

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Dopo aver mostrato che $8 \in M$, determinare tutti i numeri reali x tali che $\mathrm{rd}(x) = 8$.

Problema 2

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare A^{-1} e poi il numero di condizionamento di A in norma uno, $c_1(A)$.

Problema 3

Sia $f(x) = 2\cosh(x) - 4 = e^x + e^{-x} - 4$.

(a) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(b) Detto α lo zero positivo di f, determinare x_0 tale che la successione generata dal metodo di Newton a partire da x_0, ed operando in $\mathbb{R}$, risulti convergente ad α.

Soluzione

Problema 1

Poiché la scittura di 8 in base due è 1000, si ha $8 = 2^4 \cdot 0.100 \in M$.

Dalla definizione di funzione di arrotondamento in M, detti rispettivamente m_- ed m_+ i punti medi dei segmenti di estremi $\pi(8), 8$ e $8, \sigma(8)$, gli elementi cercati sono quelli dell'intervallo:

$$[m_-, m_+]$$

ovvero, essendo: $m_- = 2^3 \cdot 0.1111$ e $m_+ = 2^4 \cdot 0.1001$, quelli dell'intervallo:

$$[2^3 \cdot 0.1111 \ , \ 2^4 \cdot 0.1001] = [7.5 \ , \ 9]$$

Problema 2

La matrice A è triangolare inferiore e certamente invertibile. L'inversa si calcola una colonna alla volta utilizzando la procedura di sostituzione in avanti per risolvere i sistemi $Ax = e_1$, ..., $Ax = e_4$. Si ottiene:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il numero di condizionamento vale allora: $c_1(A) = ||A||_1 \cdot ||A^{-1}||_1 = 2 \cdot 4 = 8$.

Problema 3

Per la funzione f, definita su $\mathbb{R}$, si ha:

$$f'(x) = 2 \ \mathrm{senh}(x) = e^x - e^{-x}$$

e

$$f''(x) = 2 \ \cosh(x) = e^x + e^{-x}$$

La derivata seconda è sempre diversa da zero, quindi f ha al più due zeri. Inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad f(0) = -2$$

dunque: *f ha due zeri*: uno positivo ed uno negativo.

Un intervallo finito che contiene lo zero positivo α si ottiene constatando che:

$$f(-2) = e^{-2} + e^2 - 4 > 0 \quad \text{e} \quad f(-1) = e^{-1} + e - 4 < 0$$

perciò: $\alpha \in [1, 2]$. Osservando che f è una funzione pari, l'altro zero è $-\alpha \in [-2, -1]$.

Nell'intervallo $[1, 2]$, che contiene lo zero positivo α di f, si ha:

$$f'(x) > 0 \qquad \text{e} \qquad f''(x) > 0$$

dunque il metodo di Newton genera una successione certamente convergente ad α a partire da $x_0 = 2$, e tale successione risulta decrescente e di ordine di convergenza due.

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 19 settembre 2012

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Calcolare: $(0.101 \oplus 0.110) \ominus 0.110$.

Problema 2

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione LR di A ed utilizzarla per calcolare A^{-1}.

Problema 3

Determinare il polinomio di grado al più uno che meglio approssima i dati $(0,0), (-1,1)$, $(2,1), (1,0)$ nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Per definizione: $0.101 \oplus 0.110 = \mathrm{rd}(0.101 + 0.110) = \mathrm{rd}(2^1 \cdot 0.1011) = 2^1 \cdot 0.110$, poi: $2^1 \cdot 0.110 \ominus 0.110 = \mathrm{rd}(2^1 \cdot 0.110 - 0.110) = \mathrm{rd}(0.110) = 0.110$. Quindi:

$$(0.101 \oplus 0.110) \ominus 0.110 = 0.110$$

Problema 2

Applicando, ad esempio, la procedura `EG`, si ottiene:

$$A = SD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si ha poi: $A^{-1} = D^{-1}S^{-1}$. Inoltre:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Problema 3

L'elemento cercato ha la forma $p(t) = a_0 + a_1 t$. I coefficienti a_0 e a_1 si devono determinare in modo che la quantità

$$F(a_0, a_1) = (p(0) - 0)^2 + (p(-1) - 1)^2 + (p(2) - 1)^2 + (p(1) - 0)^2$$

assuma valore minimo.

Questo problema equivale a determinare la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

originato imponendo a $p(t)$ di interpolare i dati.

La soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati si ottiene risolvendo il sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad , \quad a_1 = 0$$

L'elemento richiesto è quindi: $p(t) = \frac{1}{2}$.