Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 19 settembre 2012

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Calcolare: $(0.101 \oplus 0.110) \ominus 0.110$.

Problema 2

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione LR di A ed utilizzarla per calcolare A^{-1}.

Problema 3

Determinare il polinomio di grado al più uno che meglio approssima i dati $(0,0), (-1,1)$, $(2,1), (1,0)$ nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Per definizione: $0.101 \oplus 0.110 = \mathrm{rd}(0.101 + 0.110) = \mathrm{rd}(2^1 \cdot 0.1011) = 2^1 \cdot 0.110$, poi: $2^1 \cdot 0.110 \ominus 0.110 = \mathrm{rd}(2^1 \cdot 0.110 - 0.110) = \mathrm{rd}(0.110) = 0.110$. Quindi:

$$(0.101 \oplus 0.110) \ominus 0.110 = 0.110$$

Problema 2

Applicando, ad esempio, la procedura `EG`, si ottiene:

$$A = SD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si ha poi: $A^{-1} = D^{-1}S^{-1}$. Inoltre:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Problema 3

L'elemento cercato ha la forma $p(t) = a_0 + a_1 t$. I coefficienti a_0 e a_1 si devono determinare in modo che la quantità

$$F(a_0, a_1) = (p(0) - 0)^2 + (p(-1) - 1)^2 + (p(2) - 1)^2 + (p(1) - 0)^2$$

assuma valore minimo.

Questo problema equivale a determinare la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

originato imponendo a $p(t)$ di interpolare i dati.

La soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati si ottiene risolvendo il sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad , \quad a_1 = 0$$

L'elemento richiesto è quindi: $p(t) = \frac{1}{2}$.