Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 24 luglio 2012

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Dopo aver mostrato che $8 \in M$, determinare tutti i numeri reali x tali che $\mathrm{rd}(x) = 8$.

Problema 2

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare A^{-1} e poi il numero di condizionamento di A in norma uno, $c_1(A)$.

Problema 3

Sia $f(x) = 2\cosh(x) - 4 = e^x + e^{-x} - 4$.

(a) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(b) Detto α lo zero positivo di f, determinare x_0 tale che la successione generata dal metodo di Newton a partire da x_0, ed operando in $\mathbb{R}$, risulti convergente ad α.

Soluzione

Problema 1

Poiché la scittura di 8 in base due è 1000, si ha $8 = 2^4 \cdot 0.100 \in M$.

Dalla definizione di funzione di arrotondamento in M, detti rispettivamente m_- ed m_+ i punti medi dei segmenti di estremi $\pi(8), 8$ e $8, \sigma(8)$, gli elementi cercati sono quelli dell'intervallo:

$$[m_-, m_+]$$

ovvero, essendo: $m_- = 2^3 \cdot 0.1111$ e $m_+ = 2^4 \cdot 0.1001$, quelli dell'intervallo:

$$[2^3 \cdot 0.1111 \ , \ 2^4 \cdot 0.1001] = [7.5 \ , \ 9]$$

Problema 2

La matrice A è triangolare inferiore e certamente invertibile. L'inversa si calcola una colonna alla volta utilizzando la procedura di sostituzione in avanti per risolvere i sistemi $Ax = e_1$, ..., $Ax = e_4$. Si ottiene:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il numero di condizionamento vale allora: $c_1(A) = ||A||_1 \cdot ||A^{-1}||_1 = 2 \cdot 4 = 8$.

Problema 3

Per la funzione f, definita su $\mathbb{R}$, si ha:

$$f'(x) = 2 \ \mathrm{senh}(x) = e^x - e^{-x}$$

e

$$f''(x) = 2 \ \cosh(x) = e^x + e^{-x}$$

La derivata seconda è sempre diversa da zero, quindi f ha al più due zeri. Inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad , \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad f(0) = -2$$

dunque: *f ha due zeri*: uno positivo ed uno negativo.

Un intervallo finito che contiene lo zero positivo α si ottiene constatando che:

$$f(-2) = e^{-2} + e^2 - 4 > 0 \quad \text{e} \quad f(-1) = e^{-1} + e - 4 < 0$$

perciò: $\alpha \in [1, 2]$. Osservando che f è una funzione pari, l'altro zero è $-\alpha \in [-2, -1]$.

Nell'intervallo $[1, 2]$, che contiene lo zero positivo α di f, si ha:

$$f'(x) > 0 \qquad \text{e} \qquad f''(x) > 0$$

dunque il metodo di Newton genera una successione certamente convergente ad α a partire da $x_0 = 2$, e tale successione risulta decrescente e di ordine di convergenza due.