Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 3 luglio 2012

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Determinare il più piccolo elemento $\xi \in M$ maggiore di $\frac{1}{3}$.

Problema 2

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Decidere se A sia definita positiva e risolvere il sistema $Ax = b$.

Problema 3

Determinare il polinomio di grado al più uno che meglio approssima i dati $(0,0), (1,1), (2,1)$ nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Poiché $\frac{1}{3} \notin M$, detti ξ_1 e ξ_2 gli elementi di M adiacenti ad $\frac{1}{3}$, l'elemento cercato è ξ_2.

Si ha:

$$\tfrac{1}{3} = 2^{-1} \cdot 0.101010 \cdots$$

e quindi:

$$\xi_1 = 2^{-1} \cdot 0.101 \quad , \quad \xi_2 = 2^{-1} \cdot 0.110$$

L'elemento cercato è dunque:

$$\xi_2 = 2^{-1} \cdot 0.110$$

Problema 2

La procedura `EG` termina su A e si ottiene:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Essendo $d_{22} < 0$, la matrice A risulta *non* definita positiva.

Per risolvere il sistema $Ax = b$ si utilizza la fattorizzazione LR di A appena determinata. Si risolve prima il sistema $Sc = b$ utilizzando la procedura di sostituzione in avanti (la matrice S è triangolare inferiore) poi si ottiene la soluzione del sistema iniziale risolvendo il sistema $Dx = c$ con la procedura di sostituzione all'indietro (la matrice D è triangolare superiore).

Si ha:

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problema 3

L'elemento cercato ha la forma $p(t) = a_0 + a_1 t$. I coefficienti a_0 e a_1 si devono determinare in modo che la quantità

$$F(a_0, a_1) = (p(0) - 0)^2 + (p(1) - 1)^2 + (p(2) - 1)^2$$

assuma valore minimo.

Questo problema equivale a determinare la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

originato imponendo a $p(t)$ di interpolare i dati.

La soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati si ottiene risolvendo il sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$a_0 = \frac{1}{6} \quad , \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

L'elemento richiesto è quindi: $p(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}t$.