Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 13 giugno 2012

Problema 1

Sia $M = F(2,2)$. Determinare tutti gli elementi $\xi \in M$ tali che $\xi \otimes 2 = 6$.

Problema 2

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Applicare ad A la procedura `EGP` ed utilizzare la fattorizzazione ottenuta per risolvere il sistema $Ax = b$.

Problema 3

Determinare la forma di Lagrange del polinomio che interpola i dati $(0,0), (1,1), (2,1)$.

Soluzione

Problema 1

Si constata che $2 = 2^2 \cdot 0.10 \in M$ e $6 = 2^3 \cdot 0.11 \in M$. Per definizione, $\xi \otimes 2 = \mathrm{rd}(2\xi)$. Posto $x = 2\xi$, si ha:

$$\mathrm{rd}(x) = 6 \quad \text{se e solo se} \quad x \in (2^3 \cdot 0.101; 2^3 \cdot 0.111)$$

essendo $2^3 \cdot 0.101$ il punto medio dell'intervallo di estremi $\pi(6)$, 6 e $2^3 \cdot 0.111$ il punto medio dell'intervallo di estremi 6, $\sigma(6)$. Ne segue:

$$\tfrac{1}{2}x \in (2^2 \cdot 0.101; 2^2 \cdot 0.111)$$

I numeri di macchina cercati sono dunque quelli inclusi nell'intervallo appena determinato. L'unico elemento di M così individuato è: $\xi = 2^2 \cdot 0.11 = 3$.

Problema 2

Essendo $a_{11} = 0$, occorre utilizzare una matrice di permutazione per poter poi eseguire il primo passo dell'eliminazione di Gauss. Si constata che utilizzando la matrice P_{12}, che permuta le righe 1 e 2, si ottiene la matrice $P_{12}A$ per la quale il primo passo della procedura `EG` termina utilizzando $H_1 = I$ (gli elementi al di sotto della diagonale nella prima colonna della matrice $P_{12}A$ sono già zero). Posto quindi $A^{(2)} = P_{12}A$ si verifica che $a_{22}^{(2)} = 0$ e quindi anche per il secondo passo della procedura occorre permutare le righe. Si constata che utilizzando la matrice P_{23}, che permuta le righe 2 e 3, si ottiene la matrice $P_{32}A^{(2)}$ per la quale il secondo passo della procedura `EG` termina utilizzando $H_2 = I$ (gli elementi al di sotto della diagonale nella seconda colonna della matrice $P_{23}A^{(2)}$ sono già zero). Posto $A^{(3)} = P_{23}A^{(2)}$, la procedura termina e si ha:

$$\mathrm{EGP}(A) = (\,P, S, D\,)$$

con:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad S = I \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema $Ax = b$ è equivalente al sistema $PAx = Pb$ che si riscrive: $SDx = Pb$. La soluzione del sistema (unica, essendo $\det D \neq 0$) si ottiene risolvendo, nell'ordine, i due sistemi $Sc = Pb$ (in questo caso la matrice del sistema è la matrice identica, dunque la soluzione del sistema è banale) e $Dx = c$ (con matrice triangolare superiore, e quindi risolubile con la procedura di *sostituzione all'indietro*). Si ottiene:

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Scelta come base di Lagrange: $\ell_{20}(x), \ell_{21}(x), \ell_{22}(x)$ con

$$\ell_{20}(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \quad , \quad \ell_{21}(x) = \frac{x(x-2)}{-1} \quad , \quad \ell_{22}(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

(la base ha *tre* elementi perché si devono interpolare *tre* dati), si ottiene:

$$p(x) = \ell_{21}(x) + \ell_{22}(x)$$