Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 12 aprile 2012

Problema 1

Sia $M = F(2,4)$. Determinare l'arrotondato di $x = \frac{3}{15}$ in M.

Problema 2

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Determinare $\texttt{EGP}(A)$.

Problema 3

Determinare la forma di Lagrange del polinomio che interpola i dati $(0,1), (1,0), (2,0)$.

Soluzione

Problema 1

Poiché:

$$\tfrac{1}{8} < x \leqslant \tfrac{1}{4}$$

l'esponente di x in base due è -2, e per la frazione si ha:

$$g = \tfrac{12}{15} = 0.11001\ldots$$

Ne segue che $x \notin F(2,4)$.

Per determinare l'arrotondato di x si considerano i due elementi di $F(2,4)$ ad esso adiacenti:

$$2^{-2} \cdot 0.1100 < x < 2^{-2} \cdot 0.1101$$

Piochè x risulta più vicino al secondo dei due, si ha: $\mathrm{rd}(x) = 2^{-2} \cdot 0.1101$.

Problema 2

Poiché $a_{11} = 0$, è necessario permutare le righe per procedere con l'eliminazione. Detta P_{13} la matrice di permutazione che scambia le righe prima e terza, posto $A_2 = P_{13}A$, la procedura di eliminazione procede ponendo:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

e $A_3 = H_1 A_2$. Poiché A_3 risulta triangolare inferiore, si ha $D = A_3$. Inoltre:

$$D = H_1 P_{13} A \quad \text{ovvero} \quad H_1^{-1} D = P_{13} A$$

e quindi:

$$\mathtt{EGP}(A) = (P_{13}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix})$$

Problema 3

La base di Lagrange risulta (si devono interpolare tre dati, quindi la base ha tre elementi):

$$\ell_{02}(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \quad , \quad \ell_{12}(x) = \frac{x(x-2)}{-1} \quad , \quad \ell_{22}(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

Quindi, ricordando che nel caso della forma di Lagrange i coefficienti della combinazione lineare degli elementi della base che genera il polinomio interpolante $p(x)$ sono i valori da interpolare, si ha:

$$p(x) = 1 \cdot \ell_{20}(x) = \tfrac{1}{2}(x-1)(x-2)$$