Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 21 febbraio 2012

Problema 1

Sia $M = F(2, 4)$. Determinare l'arrotondato di $x = \frac{1}{18}$ in M.

Problema 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, sia

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 1 \\ x & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, decidere se $A(x)$ ammette fattorizzazione LR, e se sia definita positiva.

Problema 3

Sia $h(x) = -x(x - 2)$. Determinare i punti uniti di h e, per ciascuno di essi, decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione.

Soluzione

Problema 1

Poiché
$$\frac{1}{32} < x \leqslant \frac{1}{16}$$
l'esponente di x in base due è -4, e per la frazione si ha:
$$g = \tfrac{8}{9} = 0.11100\ldots$$
Ne segue che $x \notin F(2,4)$.

Per determinare l'arrotondato di x si considerano i due elementi di $F(2,4)$ ad esso adiacenti:
$$2^{-4} \cdot 0.1110 < x < 2^{-4} \cdot 0.1111$$
Piochè x risulta più vicino al primo dei due, si ha: $\mathrm{rd}(x) = 2^{-4} \cdot 0.1110$.

Problema 2

Poichè per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $\det A[1] \neq 0$ e $\det A[2] \neq 0$. la procedura `EG` termina su $A(x)$ per ogni x, dunque $A(x)$ ammette fattorizzazione LR (unica) per ogni x.

Il fattore destro risulta:
$$D(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - x^2 \end{bmatrix}$$
e la matrice risulta definita positiva per tutti e soli gli x tali che:
$$\frac{1}{2} - x^2 > 0$$
ovvero per:
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Problema 3

I punti uniti di h sono tutti e soli gli x tali che:
$$x = h(x) = -x(x-2)$$
e risulta: $x = 0$ e $x = 1$.

Poichè $h'(0) = 2$, non può esistere un intervallo che verifica le prime due ipotesi del Teorema di convergenza locale. Se ne deduce che il metodo iterativo definito da h *non è* utilizzabile per approssimare il primo punto unito.

Per il secondo si ha: $h'(1) = 0$ e quindi esiste un intervallo che verifica le prime due ipotesi del Teorema di convergenza locale. Se ne deduce che il metodo iterativo definito da h *è* utilizzabile per approssimare il primo punto unito (e che le successioni generate avranno ordine di convergenza almeno due).