Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 7 febbraio 2012

Problema 1

Sia $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Determinare la funzione di stabilità relativa all'algoritmo:

$$\phi(\xi) = \xi \otimes \mathtt{SEN}(\xi)$$

utilizzato per approssimare f.

Problema 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, sia

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$$

Discutere, per ogni $x \in \mathbb{R}$, l'esistenza ed unicità della fattorizzazione LR di $A(x)$.

Problema 3

Determinare il polinomio di grado al più uno che meglio approssima i dati $(0,0), (1,1), (2,1)$ nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

La funzione di stabilità richiesta esprime l'errore algoritmico in termini dell'argomento ξ e degli errori algoritmici delle singole operazioni elementari. L'errore algoritmico è, per definizione, il numero reale ϵ_a tale che:

$$\phi(\xi) = (1 + \epsilon_a) f(\xi)$$

Introducendo l'errore algoritmico di ciascuna operazione elementare si ha:

$$\phi(\xi) = \xi \otimes [(1 + \epsilon_{1a}) \operatorname{sen} \xi] = (1 + \epsilon_{2a})(1 + \epsilon_{1a}) \xi \operatorname{sen} \xi$$

Perciò:

$$\epsilon_a = \epsilon_{1a} + \epsilon_{2a} + \epsilon_{1a}\epsilon_{2a}$$

Problema 2

Si ha: $\det A[1] = 1$ e $\det A[2] = x$, e la procedura `EG` termina su $A(x)$ per ogni $x \neq 0$. Dunque $A(x)$ ammette fattorizzazione LR (unica) per ogni $x \neq 0$. Si constata infine (utilizzando la procedura di Doolittle) che $A(0)$ non ammette fattorizzazione LR.

Problema 3

L'elemento cercato ha la forma $p(t) = a_0 + a_1 t$. I coefficienti a_0 e a_1 si devono determinare in modo che la quantità

$$F(a_0, a_1) = (p(0) - 0)^2 + (p(1) - 1)^2 + (p(2) - 1)^2$$

assuma valore minimo.

Questo problema equivale a determinare la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

originato imponendo a $p(t)$ di interpolare i dati.

La soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati si ottiene risolvendo il sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$a_0 = \frac{1}{6} \quad , \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

L'elemento richiesto è quindi: $p(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} t$.