Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Appello del 18 gennaio 2012

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Determinare tutti gli elementi $\xi \in M$ tali che $\xi \oplus 1 > 1$.

Problema 2

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di A ed utilizzarla per risolvere il sistema $Ax = b$.

Problema 3

Determinare la forma di Newton del polinomio che interpola i dati $(0,0), (1,1), (2,1)$.

Soluzione

Problema 1

Per definizione, $\xi \oplus 1 = \mathrm{rd}(\xi + 1)$. Posto $x = \xi + 1$, si ha:

$$\mathrm{rd}(x) > 1 \quad \text{se e solo se} \quad x > 2^1 \cdot 0.1001$$

essendo $2^1 \cdot 0.1001$ il punto medio dell'intervallo di estremi 1, $\sigma(1)$. Inoltre:

$$x > 2^1 \cdot 0.1001 \Rightarrow \xi > 2^1 \cdot 0.1001 - 1$$

I numeri di macchina cercati sono dunque quelli tali che:

$$\xi > 2^{-2} \cdot 0.100$$

Problema 2

Una fattorizzazione QR di A si può determinare in due passi.

(1) Si constata che le colonne di A sono linearmente indipendenti, quindi esistono certamente colonne $w_1, w_2,\ w_3 \in \mathbb{R}^3$ ortogonali rispetto al prodotto scalare canonico e $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23} \in \mathbb{R}$ tali che

$$A = (w_1, w_2, w_3) \begin{bmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dall'uguaglianza letta per colonne si ricava che, dette a_1, a_2, a_3 le colonne di A:

$$a_1 = w_1 \quad , \quad a_2 = w_1\theta_{12} + w_2 \quad , \quad a_3 = w_1\theta_{13} + w_2\theta_{23} + w_3$$

Dalla prima relazione si ricava w_1, dalla seconda si ricavano θ_{12} (moltiplicando scalarmente l'uguaglianza per w_1) e poi w_2, dalla terza si ricavano infine θ_{13} (moltiplicando scalarmente per w_1), θ_{23} (moltiplicando scalarmente per w_2) e poi w_3 ottenendo:

$$A = \Omega\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Si ricavano i fattori richiesti constatando che le colonne di Ω sono ortogonali:

$$U = \Omega \quad , \quad T = \Theta$$

La fattorizzazione ottenuta si utilizza per la soluzione del sistema $Ax = b$ ponendo $c = U^\mathsf{T} b$ e risolvendo (col procedimento di sostituzione all'indietro) il sistema $Tx = c$, equivalente al sistema $Ax = b$. Si ottiene la soluzione:

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Scelta come base di Newton: $1, x, x(x-1)$ (ci si arresta al grado *due* perché si devono interpolare *tre* dati), imponendo le condizioni di interpolazione si ottiene il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Risolto il sistema si ha:

$$p(x) = b_0 + b_1\, x + b_2\, x(x-1) = x - \tfrac{1}{2} x(x-1)$$