Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Test di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

20 Settembre 2010

- Tempo a disposizione: 90 minuti

Cognome:	
Nome:	

Numero di matricola:

RISPOSTE

- **Problema 1**

- **Problema 2**
  (a)
  (b)
  (c)

- **Problema 3**
  (a)
  (b)

- **Problema 4**

- **Problema 1**

Si consideri l'insieme dei numeri di macchina $M = F(2,4)$, e siano σ, π le funzioni successore e predecessore. Determinare:

$$\sigma(1) \quad , \quad \pi(2) \quad , \quad \sigma(-1)$$

- **Problema 2**

Sia $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ una matrice simmetrica. Utilizzando la procedura `EG` su A, si ottiene la seguente fattorizzazione LR:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se sia vero o falso:

(a) La matrice A è invertibile.

(b) La matrice A è definita positiva.

(c) La matrice A è a predominanza diagonale forte.

- **Problema 3**

Sia $h(x) = e^{-x} + 4$ e si consideri il metodo iterativo $x_{k+1} = h(x_k), k = 0, 1, 2, \ldots$

(a) Indicare il numero di punti uniti di h e separarli.

(b) Per ciascun punto unito, decidere se il metodo iterativo sia utlizzabile per l'approssimazione ed eventualmente indicare un punto iniziale x_0 a partire dal quale la successione generata sia convergente.

- **Problema 4**

Determinare l'elemento di $\langle 1, x^3 \rangle$ che meglio approssima i dati:

$$(-2,1) \quad , \quad (-1,1) \quad , \quad (0,1) \quad , \quad (1,0) \quad , \quad (2,0)$$

nel senso dei minimi quadrati.

SOLUZIONE

- **Problema 1**

Poiché $1 = 2^1 \cdot 0.1000$ e $2 = 2^2 \cdot 0.1000$ si ha:

$$\sigma(1) = 2^1 \cdot 0.1001 \quad , \quad \pi(2) = 2^1 \cdot 0.1111$$

Infine, essendo $\sigma(-1) = -\pi(1)$ si ha:

$$\sigma(-1) = -2^0 \cdot 0.1111$$

- **Problema 2**

Poiché D non è invertibile, non lo è neppure $A = SD$.

Una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice simmetrica sia definita positiva è che la funzione `EG` sia definita e il fattore destro da essa prodotto abbia *tutti* gli elementi sulla diagonale positivi. Poiché quest'ultima condizione non è verificata, *la matrice A non è definita positiva.*

La prima riga di A è:

$$(3, 6, 0, 0, -3)$$

dunque *la matrice A non è a predominanza diagonale forte.*

- **Problema 3**

La funzione $F(x) = h(x) - x = e^{-x} + 4 - x$ ha per zeri tutti e soli i punti uniti di h. Poiché F risulta monotona decrescente ($F' < 0$), ha al più uno zero. Essendo $F(0) > 0$ e $F(5) < 0$ si ha uno zero, e quindi: *h ha un solo punto unito, nell'intervallo* $[0, 5]$.

Poiché $h' = -e^{-x}$, nell'intervallo $[0, 5]$ la funzione h non verifica la seconda ipotesi del Teorema di convergenza locale. Si constata immediatamente, però, che un intervallo che verifica le ipotesi uno e due del Teorema è $[1, 5]$. Dunque *il metodo iterativo è utilizzabile* per l'approssimazione, ed *un valore di x_0 che garantisce la convergenza della successione è* 5, l'estremo dell'intervallo più vicino al punto unito.

- **Problema 4**

Si cerca il polinomio della forma $p(x) = a_0 + a_3 x^3$ che rende minima la quantità:

$$(p(-2) - 1)^2 + (p(-1) - 1)^2 + (p(0) - 1)^2 + (p(1) - 0)^2 + (p(2) - 0)^2$$

I coefficienti sono le componenti della soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si ottiene: $a_0 = \frac{3}{5}$, $a_3 = \frac{9}{130}$ e *l'elemento cercato risulta*:

$$p(x) = \frac{3}{5} + \frac{9}{130}\,x^3$$