Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Test di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

19 Luglio 2010

- Tempo a disposizione: 60 minuti

Cognome:	
Nome:	

Numero di matricola:

RISPOSTE

- Problema 1

- Problema 2
  (a)
  (b)
  (c)

- Problema 3
  (a)
  (b)
  (c)

- Problema 4

- `Problema 1`

  Si consideri l'insieme dei numeri di macchina $M = F(2,4)$. Determinare il numero di elementi $\xi \in M$ che verificano la relazione:

$$2^{-3} \cdot 0.1010 \leqslant \xi \leqslant 2^{0} \cdot 0.1010$$

- `Problema 2`

  Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  (a) Decidere se la procedura `EG` termina su A.

  (b) Determinare una fattorizzazione LR di A.

  (c) Decidere se A sia definita positiva.

- `Problema 3`

  Sia $h(x) = x^6$.

  (a) Determinare i punti uniti di h.

  (b) Per ciascuno dei punti uniti, decidere se il metodo iterativo generato da h sia utilizzabile per l'approssimazione.

  (c) Indicare $x_0 \neq 0$ a partire dal quale la successione generata dal metodo iterativo definito da h, ed operando in $\mathbb{R}$, è convergente a 0.

- `Problema 4`

  Determinare tutti i polinomi p, a coefficienti reali e di grado al più due, che verificano le condizioni:

$$p'(1) = 0 \quad , \quad p(1) - p(2) = 0$$

SOLUZIONE

- `Problema 1`

Gli elementi cercati sono quelli con esponente -3 e frazione maggiore o uguale a 0.1010 (che sono 6), tutti quelli con esponente -2 (che sono 8), tutti quelli con esponente -1 (anch'essi 8) e quelli con esponente 0 e frazione minore o uguale a 0.1010 (che sono 3). In totale *gli elementi di M che verificano la relazione sono* 25.

- `Problema 2`

La procedura `EG` *termina su A*, infatti si ha:

$$\det A[1] = 1 \neq 0 \quad \text{e} \quad \det A[2] = -1 \neq 0$$

Ne segue che la matrice A ammette un'unica fattorizzazione LR. *I fattori sono*:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poiché gli elementi sulla diagonale del fattore destro non sono tutti positivi, *la matrice A, simmetrica, non è definita positiva.*

- `Problema 3`

I punti uniti della funzione $h(x)$ risultano: $\alpha_1 = 0$ *e* $\alpha_2 = 1$.

Poiché $h'(x) = 6x^5$, si ha: $h'(\alpha_1) = 0$ e $h'(\alpha_2) = 6$. Dunque: *il metodo è utilizzabile per approssimare il punto unito* α_1 ma *non è utilizzabile per approssimare il punto unito* α_2.

Infine, poiché:

$$|h'(x)| < 1 \quad \text{se e solo se} \quad -\tfrac{1}{\sqrt[5]{6}} < x < \tfrac{1}{\sqrt[5]{6}}$$

un valore di x_0 che genera una successione convergente a $\alpha_1 = 0$ è:

$$x_0 = \tfrac{1}{2} < \tfrac{1}{\sqrt[5]{6}}$$

- `Problema 4`

Come base dello spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado al più due possiamo scegliere:

$$1 \quad , \quad t-1 \quad , \quad (t-1)(t-2)$$

Con questa scelta, i polinomi cercati hanno la forma:

$$p(t) = b_0 + b_1(t-1) + b_2(t-1)(t-2) \quad , \quad b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

Il problema si traduce nel determinare i coefficienti b_0, b_1, b_2 in modo che i polinomi che ne risultano verifichino le condizioni richieste. Le condizioni sui coefficienti sono:

$$b_1 - b_2 = 0 \qquad , \qquad -b_1 = 0$$

Dunque, *gli elementi richiesti sono*:

$$\{\ p(t) = b_0, b_0 \in \mathbb{R}\ \}$$