Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Test di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

28 Giugno 2010

- Tempo a disposizione: 60 minuti

Cognome:

Nome:

Numero di matricola:

RISPOSTE

- `Problema 1`

- `Problema 2`
  (a)
  (b)
  (c)

- `Problema 3`
  (a)
  (b)

- `Problema 4`

- `Problema 1`

  Si consideri l'insieme dei numeri di macchina $M = F(2,3)$. Dimostrare che $5 \in M$, $20 \in M$ e determinare $\xi = 20 \oplus 5$.

- `Problema 2`

  Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

  (a) Determinare una fattorizzazione LR di A.

  (b) Determinare A^{-1}.

  (c) Determinare il numero di condizionamento di A in norma infinito.

- `Problema 3`

  Sia $f(x) = e^{-x} + x - 3$.

  (a) Determinare il numero di zero di f e separarli.

  (b) Per ciascuno zero, indicare un punto a partire dal quale il metodo di Newton, applicato ad f, genera una successione convergente allo zero.

- `Problema 4`

  Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  Determinare la soluzione del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.

SOLUZIONE

- **Problema 1**

La scrittura un base due di cinque è 101, quella di venti è 10100 e quindi:

$$5 = 2^3 \cdot 0.101 \in M \qquad \text{e} \qquad 20 = 2^5 \cdot 0.101 \in M$$

Per definizione di *pseudo-operazioni aritmetiche* si ha:

$$\xi = \mathrm{rd}(20+5) = \mathrm{rd}(25)$$

La scrittura in base due di venticinque è $11001 = 2^5 \cdot 0.11001$, quindi:

$$\xi = 2^5 \cdot 0.110 = 24$$

- **Problema 2**

La procedura `EG` è definita in A, dunque la fattorizzazione LR di A esiste unica e risulta:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad , \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizzando la fattorizzazione trovata si ha $A^{-1} = D^{-1}S^{-1}$. Le inverse dei fattori sono:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad , \qquad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Infine, il numero di condizionamento di A in norma infinito è:

$$||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty = 3 \cdot 5 = 15$$

- **Problema 3**

La funzione f, definita su $\mathbb{R}$, ha derivate:

$$f'(x) = -e^{-x} + 1 \qquad , \qquad f''(x) = e^{-x}$$

La derivata seconda è sempre diversa da zero, quindi f ha al più due zeri. Inoltre:

$$f(0) < 0 \qquad , \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

dunque: *f ha due zeri*: $\alpha_1 < 0$ e $\alpha_2 > 0$.

Intervalli finiti che separano gli zeri si ottengono constatando che:

$$f(-2) = e^2 - 1 > 0 \quad \text{e} \quad f(-1) = e - 4 < 0 \qquad , \qquad f(2) = e^{-2} - 1 < 0 \quad \text{e} \quad f(3) = e^{-3} > 0$$

perciò: $\alpha_1 \in [-2, -1]$ e $\alpha_2 \in [2, 3]$.

Infine: per ogni $x \in [-2, -1]$ si ha: $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$ ed il metodo di Newton genera una successione certamente convergente ad α_1 a partire da $x_0 = -2$; per ogni $x \in [2, 3]$ si ha: $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ ed il metodo di Newton genera una successione certamente convergente ad α_2 a partire da $x_0 = 3$.

- `Problema 4`

Le colonne della matrice A sono linearmente indipendenti, quindi il sistema ha una sola soluzione, x^*, nel senso dei minimi quadrati. Si ha:

$$A^\mathsf{T} A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad A^\mathsf{T} b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad x^* = (A^\mathsf{T} A)^{-1} A^\mathsf{T} b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Si osservi che $b \notin \operatorname{Im} A$ e quindi x^* non è soluzione del sistema.