Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Test di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

7 Giugno 2010

- Tempo a disposizione: 60 minuti

Cognome:	
Nome:	

Numero di matricola:

RISPOSTE

- Problema 1

- Problema 2
  (a)
  (b)
  (c)

- Problema 3
  (a)
  (b)

- Problema 4

- `Problema 1`

  Si consideri l'insieme dei numeri di macchina $M = F(2,4)$. Determinare l'arrotondato di $x = \frac{6}{21}$.

- `Problema 2`

  Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se sia vero o falso:

  (a) *Se* $A^\mathsf{T} = A$, *allora* $||A||_1 = ||A||_\infty$.

  (b) *Se* A non è invertibile, *allora* $||A||_1 = 0$.

  (c) *Se* $||A||_1 = 0$, *allora* $||A||_\infty = 0$.

- `Problema 3`

  Sia $h(x) = 3 \operatorname{arctg} x$.

  (a) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli.

  (b) Per ciascun punto unito, decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione.

- `Problema 4`

  Determinare la forma di Newton del polinomio che interpola i dati: $(0,4)$, $(1,1)$, $(-1,1)$.

SOLUZIONE

- `Problema 1`

Poiché $\frac{1}{4} < \frac{6}{21} < \frac{1}{2}$, l'esponente di x è -1 e la frazione è $g = \frac{12}{21}$. Detta $0.c_1c_2\cdots$ la scrittura in base due della frazione, si ha:

$$\frac{12}{21} = 0.c_1c_2\cdots \quad \text{da cui} \quad \frac{24}{21} = c_1.c_2\cdots$$

dunque: $c_1 = 1$ e $\frac{3}{21} = 0.c_2c_3\cdots$ Ripetendo il procedimento si ottiene:

$$\frac{12}{21} = 0.100100100100100\cdots$$

Poiché la frazione non è compatibile con la precisione, $x \notin M$.

Per ottenere l'arrotondato si constata che:

$$2^{-1}\cdot 0.1001 < x < 2^{-1}\cdot 0.10011 < 2^{-1}\cdot 0.1010$$

e quindi: $\mathrm{rd}(x) = 2^{-1}\cdot 0.1001$.

- `Problema 2`

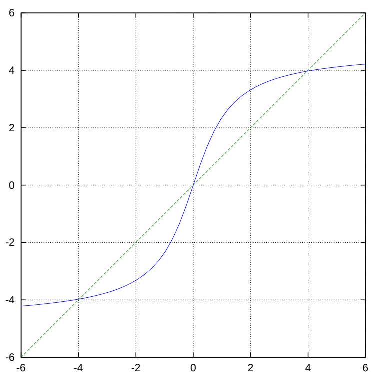
Poiché $||A||_\infty = ||A^\mathsf{T}||_1 = ||A||_1$, il primo asserto è dunque *vero*.

Il secondo asserto è *falso*, come dimostrato, ad esempio, dalla matrice di elementi $a_{ij} = 1$. Tale matrice è non invertibile e si ha: $||A||_1 = n$.

Se $||A||_1 = 0$ allora, necessariamente, A è la matrice nulla, quindi anche $||A||_\infty = 0$: il terzo asserto è *vero*.

- `Problema 3`

Come si deduce dal disegno, *la funzione h ha tre punti uniti*: $\alpha_1 \in (-\frac{3\pi}{2}, 0)$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = -\alpha_1$.



Dal disegno, come anche analiticamente, si deduce che:

$$0 < h'(\alpha_1) < 1 \quad , \quad h'(\alpha_2) > 1 \quad , \quad 0 < h'(\alpha_3) < 1$$

quindi: *il metodo iterativo definito da h è utilizzabile per approssimare α_1 e α_3, ma non α_2.*

- `Problema 4`

  Considerando i tre dati nell'ordine in cui sono assegnati, la forma di Newton del polinomio interpolante sarà:

  $$b_0 + b_1 x + b_2\, x(x-1)$$

  Per determinare i coefficienti si impongono le condizioni di interpolazione e si ottiene il sistema:

  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  Il polinomio richiesto risulta quindi:

  $$p(x) = 4 - 3\,x - 3\,x(x-1)$$