Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Test di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

15 Febbraio 2010

- Tempo a disposizione: 60 minuti

Cognome:

Nome:

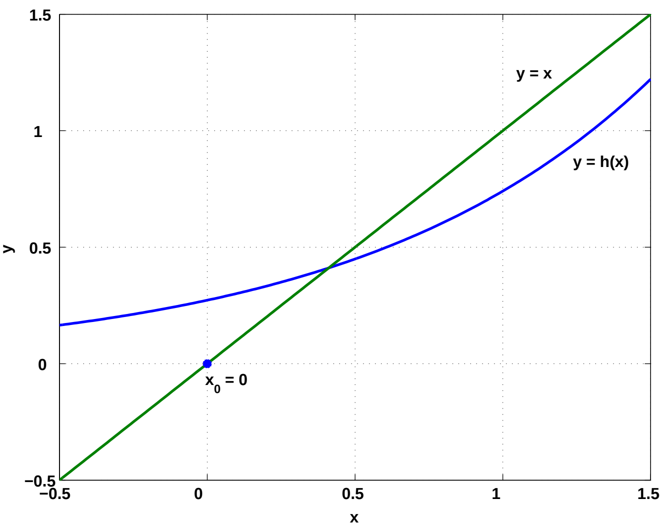
Numero di matricola:

RISPOSTE

- Problema 1

- Problema 2
  (a)
  (b)
  (c)

- Problema 3
  (a)



  (b)

- Problema 4

- **`Problema 1`**

  Si consideri l'insieme dei numeri di macchina $M = F(2,4)$. Determinare il minimo numero intero positivo non appartenente ad M.

- **`Problema 2`**

  Sia L, U una fattorizzazione di $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice ortogonale e $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice triangolare superiore con elementi diagonali $u_{kk} = 1, k = 1, 2, \ldots, n$. Sia inoltre $b \in \mathbb{R}^n$. Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se sia vero o falso:

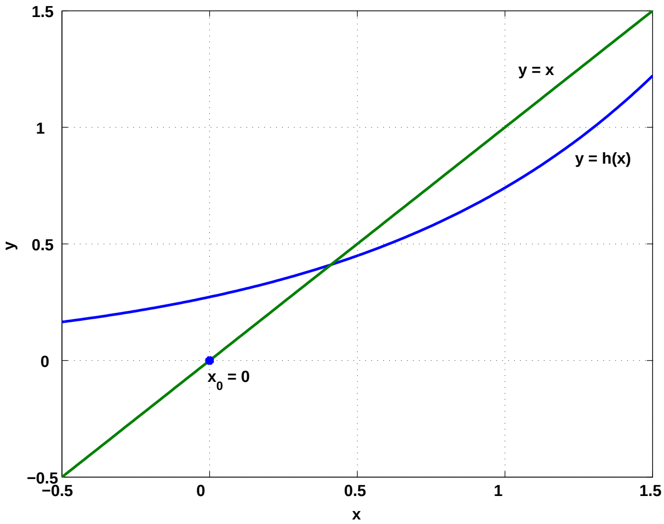
  (a) Si ha certamente $\det A = 1$.

  (b) A è invertibile.

  (c) Posto $c = L^{\mathsf{T}} b$, i sistemi $Ux = c$ e $Ax = b$ sono equivalenti.

- **`Problema 3`**

  In figura sono rappresentati, per $x \in [-0.5, 1.5]$, il grafico della funzione $y = h(x)$, il grafico della funzione $y = x$ e il punto x_0 :



  Si consideri il metodo iterativo $x_{k+1} = h(x_k), k = 0, 1, 2, \ldots$

  (a) Indicare sul grafico la costruzione geometrica di x_1 ed x_2.

  (b) Dal grafico si deduce che nell'intervallo $[-0.5, 1.5]$ la funzione h ha un punto fisso. Decidere se il metodo iterativo sia utilizzabile per la sua approssimazione.

- **`Problema 4`**

  Per risolvere un problema di interpolazione polinomiale si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Indicare la base utilizzata ed i dati del problema.

SOLUZIONE

* **`Problema 1`**

Tutti gli interi che in base due si rappresentano con al più quattro cifre sono in M (ad esempio: undici $= 1011 = 2^4 \cdot 0.1011$). Il numero richiesto va dunque cercato tra gli interi che si rappresentano con cinque cifre. Il più piccolo è 10000, che appartiene ad M. Il successivo è 10001 che non appartiene ad M. Dunque l'elemento richiesto è 17.

* **`Problema 2`**

Poiché L, U è una fattorizzazione di A, si ha $A = LU$ e quindi $\det A = \det L \det U$. Poiché U è triangolare con $u_{kk} = 1$ si ha $\det U = 1$, e quindi $\det A = \det L$. L'essere L ortogonale garantisce solo che $|\det L| = 1$. Dunque il primo asserto è *falso.*

Per quanto detto sopra, A è invertibile e il secondo asserto è *vero.*

Il sistema $Ax = b$ si riscrive $LUx = b$. Quest'ultimo sistema, per le proprietà di L, è equivalente a $Ux = L^{\mathsf{T}} b$. Dunque il terzo asserto è *vero.*

* **`Problema 3`**

La costruzione grafica di $h(x)$ a partire da x consiste nella determinazione del punto D di coordinate $(h(x), 0)$ utilizzando, a partire dal punto A di coordinate $(x, 0)$, la procedura seguente:

(1) determinare il punto $B = (x, h(x))$ intersecando il grafico di h con la retta verticale passante per $A = (x, 0)$;

(2) determinare il punto $C = (h(x), h(x))$ intersecando il grafico di $y = x$ con la retta orizzontale passante per B;

(3) determinare il punto $D = (h(x), 0)$ intersecando l'asse delle ascisse con la retta verticale passante per C;

La costruzione di x_1 si effettua determinando il punto $P_1 = (h(0), 0)$ utilizzando la procedura a partire dal punto $P_0 = (0, 0)$; quella di x_2 determinando $P_2 = (h(x_1), 0)$ utilizzandola a partire dal punto P_1.

Il metodo è certamente applicabile: dalla figura si deduce infatti che h è una funzione derivabile e che, detto α il punto unito, la condizione sufficiente $|h'(\alpha)| < 1$ è soddisfatta.

* **`Problema 4`**

La matrice del sistema risulta essere la matrice di Vandermonde relativa ai punti $-1, 0, 1, 2$. Dunque la base utilizzata per il problema di interpolazione è $\langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$. Il sistema di equazioni si ottiene imponendo le condizioni di interpolazione. Dalla colonna dei termini noti si deduce perciò che i dati da interpolare sono:

$$(-1, -1) \quad , \quad (0, 0) \quad , \quad (1, -1) \quad , \quad (2, 1)$$