Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Test di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

26 Gennaio 2010

- Tempo a disposizione: 60 minuti

Cognome:	
Nome:	

Numero di matricola:

RISPOSTE

- **Problema 1**

- **Problema 2**
  (a)
  (b)
  (c)

- **Problema 3**

- **Problema 4**

- `Problema 1`

  Si consideri l'insieme dei numeri di macchina $M = F(2,3)$. Determinare il massimo numero non intero appartenente ad M.

- `Problema 2`

  Sia $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matrice ortogonale. Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se sia vero o falso:

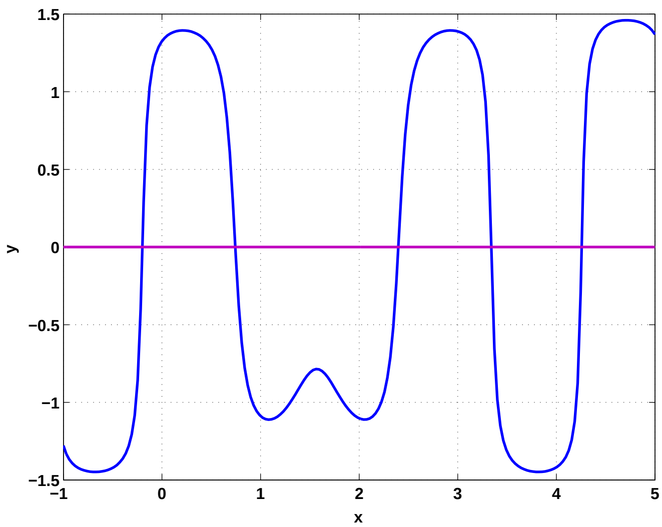
  (a) $SS^{\mathsf{T}} = I$.

  (b) Il numero di condizionamento di S in norma due vale $\frac{1}{2}$.

  (c) Esiste $x \in \mathbb{R}^2$ tale che $\|Sx\|_2 > \|x\|_2$.

- `Problema 3`

  Si consideri la funzione il cui grafico è rappresentato in figura:



  Determinare a quale zero converge il metodo di bisezione applicato a partire dall'intervallo $[-1,5]$.

- `Problema 4`

  Sia U, T una fattorizzazione QR della matrice $A \in \mathbb{R}^{7\times 5}$ e sia $b \in \mathbb{R}^7$. Indicare come si utilizza la fattorizzazione QR per determinare la soluzione di $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.

SOLUZIONE

- `Problema 1`

Un elemento positivo di $F(2,3)$ ha la forma $2^b \cdot 0.c_1c_2c_3, c_1 \neq 0$, perciò tutti gli elementi di M con esponente $b \geqslant 3$ sono interi. Il numero richiesto va dunque cercato tra quelli con esponente due. Il massimo elemento con esponente due è $2^2 \cdot 0.111$ e non è intero. Dunque è l'elemento richiesto.

- `Problema 2`

Poiché S è ortogonale, è invertibile e $S^\mathsf{T} = S^{-1}$. Allora $SS^\mathsf{T} = SS^{-1} = I$. Dunque il primo asserto è *vero.*

Il numero di condizionamento, utilizzando una qualsiasi norma indotta, è certamente non minore di uno. Il secondo asserto è *falso.*

Poiché $\|Sx\|_2^2 = Sx \bullet Sx = x^\mathsf{T} S^\mathsf{T} Sx = x \bullet x = \|x\|_2^2$, il terzo asserto è *falso.*

- `Problema 3`

Partendo da $I_0 = [-1, 5]$ si ottengono $I_1 = [2, 5]$ e $I_2 = [3.5, 5]$. Quest'ultimo intervallo contiene un solo zero della funzione. Perciò la successione generata converge allo zero compreso tra 4 e 5.

- `Problema 4`

La soluzione del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati si ottiene dalle equazioni normali $A^\mathsf{T} Ax = A^\mathsf{T} b$. Utilizzando la fattorizzazione QR di A, quest'ultimo sistema è equivalente al sistema $Tx = U^\mathsf{T} b$. Dunque, la soluzione del sistema $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati si ottiene costruendo il vettore $c = U^\mathsf{T} b$ e poi risolvendo il sistema $Tx = c$ con la procedura di sostituzione all'indietro.