Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Test di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

8 Gennaio 2010

- Tempo a disposizione: 60 minuti

Cognome:

Nome:

Numero di matricola:

RISPOSTE

- `Problema 1`

- `Problema 2`
  (a)
  (b)
  (c)

- `Problema 3`
  (a)
  (b)

- `Problema 4`

- **Problema 1**

  Si consideri l'insieme dei numeri di macchina $M = F(3, 3)$. Indicare il numero di elementi di M appartenenti all'intervallo $[3^{-2} \cdot 0.100; 3^2 \cdot 0.222]$.

- **Problema 2**

  Sia $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice simmetrica invertibile. Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se sia vero o falso:

  (a) Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si ha $v^\mathsf{T} W v > 0$.

  (b) La matrice $W^\mathsf{T} W$ è simmetrica definita positiva.

  (c) Per ogni matrice di permutazione $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si ha $(PW)^\mathsf{T} = WP$.

- **Problema 3**

  Siano $f(x) = x + e^x$ e x_k la successione generata dal metodo di Newton applicato ad f a partire dal punto iniziale x_0.

  (a) Calcolare x_1 se $x_0 = 0$.

  (b) Decidere se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la successione x_k generata a partire da $x_0 = \alpha$ sia convergente.

- **Problema 4**

  Si considerino i dati $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$, $(0, 3)$. Determinare quale delle seguenti funzioni meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati:

$$1 + x + x^2 \quad , \quad 2^x - x \quad , \quad 2^{-x} - x$$

SOLUZIONE

- **Problema 1**

Gli elementi di M contenuti nell'intervallo sono tutti quelli con esponente -2, -1, 0, 1 e 2. Gli elementi di M con esponente assegnato sono i 18 elementi con frazione $0.100, \dots, 0.222$. In totale, dunque, gli elementi di M nell'intervallo assegnato sono *novanta*.

- **Problema 2**

La funzione $F : v \to v^\mathsf{T} W v$ assume certamente valore zero per $v = 0$. Inoltre, con le informazioni che si hanno su W non si può escludere che esista qualche v tale che $F(v) < 0$. Dunque il primo asserto è *falso*.

Si ha $W^\mathsf{T} W v \bullet v = v^\mathsf{T} W^\mathsf{T} W v = Wv \bullet Wv$ e siccome W è invertibile, quest'ultima quantità è positiva per ogni $v \neq 0$. Il secondo asserto è *vero*.

Poiché $(PW)^\mathsf{T} = W^\mathsf{T} P^\mathsf{T} = W P^\mathsf{T}$, l'asserto equivale a $WP^\mathsf{T} = WP$. Essendo W invertibile, quest'ultima uguaglianza significa $P^\mathsf{T} = P$. Poiché una matrice di permutazione può non essere simmetrica, il terzo asserto è *falso*.

- **Problema 3**

La funzione che definisce il metodo di Newton è

$$h(x) = x - \frac{x + e^x}{1 + e^x}$$

dunque, se $x_0 = 0$ si ha $x_1 = h(0) = -\frac{1}{2}$.

Poiché $f'(x) = 1 + e^x$ e $f''(x) = e^x$, entrambe le derivate sono positive per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre, $f(0) = 1$ e $f(-1) = -1 + \frac{1}{e} < 0$ dunque esiste un solo $\gamma \in (-1, 0)$ zero di f. Allora *per ogni $\alpha \geqslant \gamma$ la successione generata converge a γ*. Se $\alpha < \gamma$, si ha certamente $x_1 > \gamma$ (si constata facilmente dalla costruzione geometrica che consente di determinare x_1) e quindi *anche in questo caso la successione generata converge a γ*.

- **Problema 4**

Se A è un insieme di funzioni definite in $t_0, \dots, t_k$, gli elementi $f \in A$ che meglio approssimano i dati $(t_0, y_0), \dots, (t_k, y_k)$ nel senso dei minimi quadrati sono quelli che rendono minimo il valore del residuo quadratico

$$(f(t_0) - y_0)^2 + \cdots + (f(t_k) - y_k)^2$$

Per i dati e le funzioni assegnate, il residuo quadratico vale: 12 per $1 + x + x^2$, $\frac{41}{4}$ per $2^x - x$ e $\frac{89}{4}$ per $2^{-x} - x$. Dunque, *la funzione che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati è $2^x - x$*.