Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Corso di Laurea in Ingegneria Nucleare e della Sicurezza e Protezione

Appello dell'8 gennaio 2010

Problema 1

Siano $M = F(2,3)$ e $x = \frac{1}{5}$.

(a) Decidere se $x \in M$.

(b) Calcolare $\mathrm{rd}(x)$ e $\delta(x)$.

Problema 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ x & x & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare l'insieme T degli x per i quali la funzione `EG` è definita in $A(x)$.

(b) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ discutere l'esistenza di fattorizzazioni LR di $A(x)$.

Problema 3

Determinare gli elementi di $\langle 1, t \rangle$ che meglio approssimano i dati $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(-1,0)$ nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

(a) Tutti gli elementi non nulli di M sono numeri razionali con denominatore potenza di due. Poiché x è razionale ma ha denominatore non potenza di due:

$$x \textit{ non è elemento di } M$$

Alternativamente, essendo $x \neq 0$, occorre verificare se la frazione di x in base due è compatibile con la precisione (tre) di M. Per calcolare l'esponente e la frazione di x relativi alla base due si constata che $2^{-3} < x < 2^{-2}$ e perciò l'esponente vale -2 e (di conseguenza) la frazione vale $4x = \frac{4}{5}$. Poiché la scrittura della frazione in base due risulta essere $\frac{4}{5} = 0.11001100\ldots$, se ne deduce che *$x$ non appartiene ad M.*

(b) Per determinare l'arrotondato di x, si considerano i numeri di macchina adiacenti ad x: $\xi_1 = 2^{-2}\,0.110$ (il più grande elemento di M minore di x) e $\xi_2 = \sigma(\xi_1) = 2^{-2}\,0.111$ (il più piccolo elemento di M maggiore di x). Siccome x risulta minore del punto medio del segmento di estremi ξ_1, ξ_2 si conclude che

$$\textit{l'arrotondato di } x \textit{ è: } \mathrm{rd}(x) = \xi_1 = 2^{-2}\,0.110$$

Infine, dalla definizione:

$$\textit{l'errore assoluto è: } \delta(x) = \mathrm{rd}(x) - x = -\frac{1}{80}$$

Problema 2

(a) La funzione `EG` è definita in $A(x)$ se e solo se $\det A(x)[1] \neq 0$ e $\det A(x)[2] \neq 0$. Poiché $\det A(x)[1] = 1$ e $\det A(x)[2] = -x$, si ha

$$T = \mathbb{R} \setminus \{\, 0 \,\}$$

(b) Per $x \in T$ la funzione `EG` è definita in $A(x)$ e quindi

$$\textit{per } x \in T,\ A(x) \textit{ ha una sola fattorizzazione LR}$$

Poiché $A(0)$ è invertibile, e $0 \notin T$:

$$\textit{la matrice } A(0) \textit{ non ammette fattorizzazione LR}$$

Problema 3

Imponendo le condizioni di interpolazione si ottiene il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

le cui soluzioni nel senso dei minimi quadrati danno i coefficienti delle combinazioni lineari richieste. Le equazioni normali risultano

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui $a_0 = \frac{5}{14}$ e $a_1 = \frac{3}{14}$ (si osservi che si ottiene una sola soluzione, come dovevamo aspettarci, essendo linearmente indipendenti ...).

Infine

l'elemento (unico) che meglio approssima i dati è: $g(t) = \frac{5}{14} + \frac{3}{14}t$

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Corso di Laurea in Ingegneria Nucleare e della Sicurezza e Protezione

Appello del 26 gennaio 2010

Problema 1

Siano $M = F(2,4)$ e rd la funzione di arrotondamento in M. Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $\mathrm{rd}(x) = 2^{-2} \cdot 0.1010$.

Problema 2

Siano

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e M tali che $(S, D) = \mathtt{EG}(M)$.

(a) Decidere se M sia simmetrica definita positiva.

(b) Calcolare $||M||_2$.

Problema 3

Sia $h(x) = \frac{1}{9} - 3x^3$.

(a) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli.

(b) Per ciascuno dei punti uniti, decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, determinare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo ed operando in $\mathbb{R}$ risulta convergente.

Soluzione

Problema 1

Sia $\xi = 2^{-2} \cdot 0.1010$; dalla definizione di funzione arrotondamento si deduce che, detti $m_1 = 2^{-2} \cdot 0.10011 = \frac{19}{128}$ il punto medio del segmento di estremi $\pi(\xi)$, ξ e $m_2 = 2^{-2} \cdot 0.10101 = \frac{21}{128}$ quello del segmento di estremi ξ, $\sigma(\xi)$, gli $x \in \mathbb{R}$ cercati sono:

$$m_1 \leqslant x \leqslant m_2$$

Problema 2

(a) Poiché risulta

$$D = \mathrm{diag}(2, \tfrac{3}{2}, -1) S^{\mathsf{T}}$$

si constata che M *è simmetrica*.

Si ricordi che una condizione equivalente all'essere M definita positiva è che gli elementi sulla diagonale del fattore destro della fattorizzazione LR determinata da $\mathtt{EG}(M)$ siano tutti positivi. Gli elementi sulla diagonale della matrice D non sono tutti positivi quindi M *non è definita positiva*.

(b) Si ricordi che

$$||M||_2 = \sqrt{\max\{\, |\lambda| \text{ tali che } \lambda \text{ è autovalore di } M^{\mathsf{T}} M \,\}}$$

Poiché M è simmetrica si ha $M^{\mathsf{T}} M = M^2$ e quindi gli autovalori cercati si ottengono prendendo il quadrato di ciascuno degli autovalori di M. Questi ultimi si deducono dal polinomio caratteristico di M:

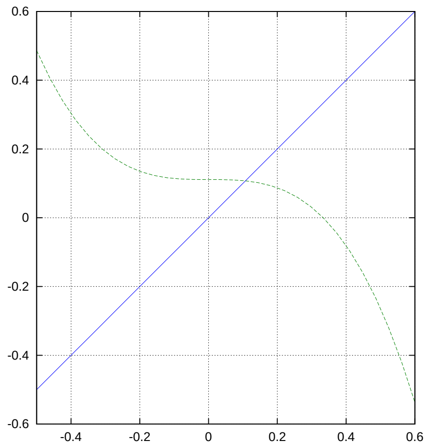
$$p(x) = [(2-x)^2 - 1](-1-x) = (2-x-1)(2-x+1)(-1-x) = (1-x)(3-x)(-1-x)$$

quindi:

$$||M||_2 = \sqrt{\max\{\, 1, 1, 9 \,\}} = 3$$

Problema 3

(a) Il grafico di $y = h(x)$ e di $y = x$ fa supporre che esista un punto unito nell'intervallo $[0, \frac{1}{5}]$.



Per verificare che h ha effettivamente un solo punto unito e che tale punto unito è nell'intervallo indicato, introduciamo la funzione $F(x) = x - h(x)$. Si constata che:

- Gli zeri di F sono tutti e soli i puntii uniti di h;
- $F'(x) = 1 + 9x^2 > 0$, quindi F non può avere più di uno zero;
- $F(0) < 0$ e $F(\frac{1}{5}) > 0$, quindi l'unico zero di F è nell'intervallo $[0, \frac{1}{5}]$.

Se ne conclude che *h ha un solo punto unito, nell'intervallo* $[0, \frac{1}{5}]$.

(b) Poiché $h'(x) = -9x^2$, per ogni $x \in [0, \frac{1}{5}]$ si ha

$$0 \leqslant |h'(x)| \leqslant \tfrac{9}{25} < 1$$

Dunque l'intervallo $[0, \frac{1}{5}]$ e la funzione h verificano le prime due ipotesi del Teorema di Convergenza Locale. Questo basta a garantire che *il metodo definito da h è utilizzabile per approssimare il punto unito.*

Un valore di x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo ed operando in $\mathbb{R}$ risulta convergente è l'estremo dell'intervallo più vicino al punto unito. Poiché $F(\frac{1}{10}) < 0$, si ha $x_0 = \frac{1}{5}$.

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Corso di Laurea in Ingegneria Nucleare e della Sicurezza e Protezione

Appello del 15 febbraio 2010

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Determinare tutti gli $\xi \in M$ tali che $\xi \ominus 2 = 1$.

Problema 2

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare una fattorizzazione QR di A.

(b) Utilizzare la fattorizzazione QR determinata al punto precedente per risolvere il sistema $Ax = b$.

Problema 3

Determinare la forma di Lagrange del polinomio che interpola i dati $(0,1)$, $(1,1)$, $(-1,0)$.

Soluzione

Problema 1

Si verifica immediatamente che $2 \in M$ e $1 \in M$. Cerchiamo inizialmente tutti i numeri ξ *reali* (non solo quelli in M) tali che:

$$\mathrm{rd}(\xi - 2) = 1$$

Ricordando la definizione di funzione arrotondamento in M, detti m_1 il punto centrale dell'intervallo di estremi $\pi(1), 1$ e m_2 il punto centrale dell'intervallo di estremi $1, \sigma(1)$, i valori cercati sono:

$$\xi - 2 \in [m_1, m_2] = [2^0\, 0.1111; 2^1\, 0.1001]$$

ovvero:

$$\xi \in [2 + m_1, 2 + m_2] = [2^2\, 0.101111; 2^2\, 0.11001]$$

Infine, si constata che *l'unico elemento di M appartenente all'intervallo individuato è* $2^2\, 0.110 = 3$.

Problema 2

Una fattorizzazione QR di A si può determinare in due passi.

(1) Si constata che le colonne di A sono linearmente indipendenti, quindi esistono certamente colonne $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ ortogonali rispetto al prodotto scalare canonico e $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23} \in \mathbb{R}$ tali che

$$A = (w_1, w_2, w_3) \begin{bmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dall'uguaglianza letta per colonne si ricava che, dette a_1, a_2, a_3 le colonne di A:

$$a_1 = w_1 \quad , \quad a_2 = w_1\theta_{12} + w_2 \quad , \quad a_3 = w_1\theta_{13} + w_2\theta_{23} + w_3$$

Dalla prima relazione si ricava w_1, dalla seconda si ricavano θ_{12} (moltiplicando scalarmente l'uguaglianza per w_1) e poi w_2, dalla terza si ricavano infine θ_{13} (moltiplicando scalarmente per w_1), θ_{23} (moltiplicando scalarmente per w_3) e poi w_3 ottenendo:

$$A = \Omega\Theta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Si ricavano i fattori richiesti ponendo

$$\Delta = \mathrm{diag}(||w_1||, ||w_2||, ||w_3||) \quad , \quad U = \Omega\Delta^{-1} \quad , \quad T = \Delta\Theta$$

Dunque, *una fattorizzazione QR di A è*

$$A = UT = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Dalla fattorizzazione ottenuta si ricava il sistema

$$Tx = U^{\mathsf{T}} b$$

equivalente ad $Ax = b$. *La soluzione* (ottenuta prima calcolando $c = U^{\mathsf{T}} b$ e poi risolvendo con la procedura di sostituzione all'indietro il sistema $Tx = c$) *è*

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Poiché si hanno tre dati (con prime coordinate distinte), il polinomio interpolante si cerca in $P_2(\mathbb{R})$, l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado al più due.

Del polinomio si chiede la forma di Lagrange, quindi occorre usare la corrispondente base di $P_2(\mathbb{R})$:

$$\ell_{2,0}(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{-1} \quad , \quad \ell_{2,1}(x) = \frac{x(x+1)}{2} \quad , \quad \ell_{2,2}(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

e *il polinomio cercato è:*

$$p(x) = 1 \cdot \ell_{2,0}(x) + 1 \cdot \ell_{2,1}(x) + 0 \cdot \ell_{2,2}(x)$$

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Corso di Laurea in Ingegneria Nucleare e della Sicurezza e Protezione

Appello del 7 giugno 2010

Problema 1

Sia $M = F(2,4)$. Determinare l'arrotondato di $x = \frac{6}{21}$.

Problema 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & x \end{bmatrix}$$

(a) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la matrice $A(x)$ ammette fattorizzazione LR e per tali valori di x indicarne una.

(b) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la matrice $A(x)$ è definita positiva.

Problema 3

Sia $h(x) = \frac{1}{2} \tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$.

(a) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli.

(b) Per ciascuno dei punti uniti, decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione.

(c) Determinare $x_0 \neq 0$ a partire dal quale la successione generata dal metodo iterativo definito da h, ed operando in $\mathbb{R}$, è convergente a 0.

Soluzione

Problema 1

Poiché $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$, l'esponente di x è -1, e quindi la frazione è $g = \frac{4}{7}$.

La scrittura $0.c_1c_2\cdots$ di g in base due si ottiene osservando che:

$$0.c_1c_2\cdots = \frac{4}{7} \quad \text{e quindi} \quad c_1.c_2\cdots = \frac{8}{7}$$

da cui $c_1 = 1$ e:

$$0.c_2c_3\cdots = \frac{1}{7} \quad \text{e quindi} \quad c_2.c_3\cdots = \frac{2}{7}$$

da cui $c_2 = 0$ e:

$$0.c_3c_4\cdots = \frac{2}{7} \quad \text{e quindi} \quad c_3.c_4\cdots = \frac{4}{7}$$

Confrontando l'ultima uguaglianza con la prima si deduce che la scittura di g è periodica, di periodo tre:

$$g = 0.100100\cdots$$

perciò:

$$x = 2^{-1} \cdot 0.100100\cdots$$

e $x \notin M$.

Infine, si constata che:

$$2^{-1} \cdot 0.1001 < x < 2^{-1} \cdot 0.10011 < 2^{-1} \cdot 0.1010$$

e quindi *l'arrotondato di x è*:

$$\text{rd}(x) = 2^{-1} \cdot 0.1001$$

Problema 2

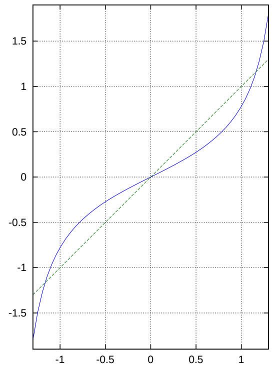
(a) La funzione `EG` è definita in $A(x)$ se e solo se $\det A(x)[1] \neq 0$, $\det A(x)[2] \neq 0$ e $\det A(x)[3] \neq 0$. Poiché $\det A(x)[1] = 1$, $\det A(x)[2] = 1$ e $\det A(x)[3] = 2$, si deduce che *la matrice $A(x)$ ammette un'unica fattorizzazione LR per ogni $x \in \mathbb{R}$* che risulta:

$$S(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix}$$

(b) La matrice $A(x)$, simmetrica per ogni $x \in \mathbb{R}$, è definita positiva se e solo se la funzione `EG` è definita in $A(x)$ ed il fattore destro $D(x)$ ha elementi tutti positivi sulla diagonale. Per quanto dedotto nel punto (a), *la matrice $A(x)$ è definita positiva se e solo se $x > 2$.*

Problema 3

(a) Il numero di punti uniti si deduce dal disegno in cui sono rappresentati i grafici delle funzioni $y = h(x)$ e $y = x$:



La funzione h ha tre punti uniti: $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = -\alpha_1$ (si osservi che la funzione h è *dispari*). Una conferma analitica del numero di punti uniti si può ottenere introducendo la funzione:

$$F(x) = h(x) - x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

e constatando che:

- $F^{(3)}(x) > 0$ per ogni $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e quindi F ha al più tre zeri (quindi h al più tre punti uniti);
- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} F(x) = +\infty$ e $F(\frac{\pi}{4}) < 0$ quindi, essendo F continua, esiste α_3 zero di F in $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.
- F è dispari.

Si deduce che: *h ha tre punti uniti $\alpha_1 \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = -\alpha_1$.*

(b) La derivata di h è:

$$h'(x) = \frac{1}{2(\cos x)^2}$$

Per α_2 si ha: $h'(\alpha_2) = h'(0) = \frac{1}{2}$ e quindi: *il metodo iterativo definito da h è utilizzabile per approssimare α_2*. Per α_1 e α_3, come si deduce anche dalla figura, si ha $h'(\alpha_1) > 1$ e $h'(\alpha_3) > 1$, dunque: *il metodo iterativo definito da h non è utilizzabile per approssimare né α_1 né α_3.*

(c) Per determinare x_0 con le proprietà richieste si utilizza il Teorema di convergenza locale. Si ha:

$$0 < h'(x) < 1 \quad \text{se e solo se} -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

Se ne deduce che: *qualsiasi $x_0 \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ soddisfa la richiesta.*

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Corso di Laurea in Ingegneria Nucleare e della Sicurezza e Protezione

Appello del 28 giugno 2010

Problema 1

Sia $M = F(2, 3)$. Dopo aver verificato che $1 \in M$ e $3 \in M$, determinare tutti gli elementi $\xi \in M$ tali che $\xi \oslash 3 = 1$.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di A.

Problema 3

Sia $f(x) = 1 - 6e^{-x}$.

(a) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(b) Per ciascuno degli zeri di f, determinare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo di Newton applicato ad f, ed operando in $\mathbb{R}$, è convergente a tale zero.

Soluzione

Problema 1

Si ha:

$$1 = 2^1 \cdot 0.100 \qquad \text{e} \qquad 3 = 2^2 \cdot 0.110$$

ed entrambi i numeri sono in M.

Per definizione, $\xi \oslash 3 = \mathrm{rd}(\xi/3)$. Posto $x = \xi/3$, si ha:

$$\mathrm{rd}(x) = 1 \quad \text{se e solo se} \quad x \in [2^0 \cdot 0.1111, 2^1 \cdot 0.1001]$$

I numeri di macchina cercati sono dunque quelli tali che:

$$2^2 \cdot 0.101101 \leqslant \xi \leqslant 2^2 \cdot 0.11011$$

Poiché:

$$2^2 \cdot 0.101 = \pi(2^2 \cdot 0.110) < 2^2 \cdot 0.101101 < 2^2 \cdot 0.110 < 2^2 \cdot 0.11011 < \sigma(2^2 \cdot 0.110) = 2^2 \cdot 0.111$$

l'unico elemento di M che soddisfa la richiesta è: $2^2 \cdot 0.110 = 3$.

Alla stessa conclusione si arriva constatando che: $3 \oslash 3 = 1$, $\pi(3) \oslash 3 < 1$ e $\sigma(3) \oslash 3 > 1$ e ricordando che per le proprietà di monotonia della funzione rd, la funzione $\xi \oslash 3$ è *crescente* nella variabile ξ.

Problema 2

Una fattorizzazione QR di A si può determinare in due passi.

(1) Si constata che le colonne di A sono linearmente indipendenti, quindi esistono certamente colonne $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ ortogonali rispetto al prodotto scalare canonico e $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23} \in \mathbb{R}$ tali che

$$A = (w_1, w_2, w_3) \begin{bmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dall'uguaglianza letta per colonne si ricava che, dette a_1, a_2, a_3 le colonne di A:

$$a_1 = w_1 \quad , \quad a_2 = w_1\theta_{12} + w_2 \quad , \quad a_3 = w_1\theta_{13} + w_2\theta_{23} + w_3$$

Dalla prima relazione si ricava w_1, dalla seconda si ricavano θ_{12} (moltiplicando scalarmente l'uguaglianza per w_1) e poi w_2, dalla terza si ricavano infine θ_{13} (moltiplicando scalarmente per w_1), θ_{23} (moltiplicando scalarmente per w_2) e poi w_3 ottenendo:

$$A = \Omega\Theta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Si ricavano i fattori richiesti ponendo

$$\Delta = \mathrm{diag}(||w_1||, ||w_2||, ||w_3||) \quad , \quad U = \Omega\Delta^{-1} \quad , \quad T = \Delta\Theta$$

Problema 3

Per la funzione f, definita su $\mathbb{R}$, si ha:

$$f'(x) = 6e^{-x}$$

La derivata prima è sempre diversa da zero, quindi f ha al più uno zero. Inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

dunque: *f ha uno zero*: α.

Un intervallo finito che contiene lo zero si ottiene constatando che:

$$f(1) = 1 - 6e^{-1} < 0 \quad \text{e} \quad f(2) = 1 - 6e^{-2} > 0$$

perciò: $\alpha \in [1, 2]$.

Inoltre:

$$f''(x) = -6e^{-x}$$

e per ogni $x \in [1, 2]$ si ha: $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$. Il metodo di Newton genera una successione certamente convergente ad α a partire da $x_0 = 1$.

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Corso di Laurea in Ingegneria Nucleare e della Sicurezza e Protezione

Appello del 19 luglio 2010

Problema 1

Stimare, in termini di precisione di macchina u, l'errore algoritmico relativo commesso utilizzando la funzione $\phi(\xi) = \mathtt{SEN}(\xi) \otimes \mathtt{COS}(\xi)$ per approssimare la funzione $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$.

Problema 2

Siano $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e $b \in \mathbb{R}^3$. Applicando la funzione `EGP` alla matrice A si ottengono le matrici:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare $\det A$.

(b) Indicare, in termini di E, F, G e b, i sistemi di equazioni da risolvere per ottenere la soluzione del sistema $Ax = b$.

Problema 3

Determinare il polinomio a coefficienti reali di grado al più uno che meglio approssima i dati:

$$(-2, 0)\ ,\ (-1, 1)\ ,\ (0, 2)\ ,\ (1, 1)\ ,\ (2, 0)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

L'errore algoritmico richiesto è, per definizione, il numero reale ϵ_a tale che:

$$\phi(\xi) = (1+\epsilon_a)f(\xi)$$

Introducendo l'errore algoritmico di ciascuna operazione elementare si ha:

$$\phi(\xi) = [(1+\epsilon_{1a})\operatorname{sen}\xi] \otimes [(1+\epsilon_{2a})\cos\xi] = (1+\epsilon_{1a})(1+\epsilon_{2a})(1+\epsilon_{3a})\operatorname{sen}\xi\cos\xi$$

Perciò:

$$1+\epsilon_a = (1+\epsilon_{1a})(1+\epsilon_{2a})(1+\epsilon_{3a})$$

da cui, ricordando che $|\epsilon_{ka}| \leqslant u$ per $k = 1, 2$ e 3, si ottiene:

$$|\epsilon_a| \leqslant 3u + 3u^2 + u^3 \approx 3u$$

Problema 2

Le matrici E, F, G ed A sono legate dalla relazione:

$$EA = FG$$

ovvero, la coppia F, G è una fattorizzazione LR di EA. Perciò si ha:

$$A = E^{\mathsf{T}}FG$$

e quindi:

$$\det A = \det E \det F \det G = 1 \cdot 1 \cdot (-6) = -6$$

Infine, il sistema $Ax = b$ è equivalente al sistema $EAx = Eb$ e, per la relazione iniziale, al sistema $FGx = Eb$. I sistemi da risolvere per ottenere la soluzione del sistema originario sono dunque, nell'ordine:

$$Fc = Eb \qquad , \qquad Gx = c$$

Dal primo sistema, utilizzando la procedura di sostituzione in avanti (la matrice F è triangolare inferiore), si ricava il vettore c; dal secondo sistema, utilizzando la procedura di sostituzione all'indietro (la matrice G è triangolare superiore), si ricava la soluzione x

Problema 3

L'elemento cercato ha la forma $p(t) = a_0 + a_1 t$. I coefficienti a_0 e a_1 si devono determinare in modo che la quantità

$$F(a_0, a_1) = (p(-2) - 0)^2 + (p(-1) - 1)^2 + (p(0) - 2)^2 + (p(1) - 1)^2 + (p(2) - 0)^2$$

assuma valore minimo.

Questo problema equivale a determinare la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

originato imponendo a $p(t)$ di interpolare i dati.

La soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati si ottiene risolvendo il sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$a_0 = \tfrac{4}{5} \quad , \quad a_1 = 0$$

L'elemento richiesto è quindi: $p(t) = \frac{4}{5}$.

Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Corso di Laurea in Ingegneria Nucleare e della Sicurezza e Protezione

Appello del 20 settembre 2010

Problema 1

Sia $\xi = 2^{-4}\, 0.1101$ un elemento di $F(2,4)$. Determinare l'arrotondato di ξ in $M = F(10,2)$.

Problema 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la funzione `EG` è definita in $A(x)$ e per tali valori di x indicare la fattorizzazione LR ottenuta.

(b) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la matrice $A(x)$ è definita positiva.

Problema 3

Determinare il polinomio a coefficienti reali di grado al più uno che meglio approssima i dati

$$(0,0) \quad , \quad (0,1) \quad , \quad (1,1) \quad , \quad (1,2)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Si ha:

$$\xi = 2^{-4}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16}\right) = \tfrac{13}{256}$$

Poiché $\frac{1}{100} < \xi < \frac{1}{10}$, l'esponente di ξ in base dieci è -1, e quindi la frazione è $g = \frac{130}{256}$. La scrittura $0.c_1c_2\cdots$ di g in base dieci si ottiene osservando che:

$$0.c_1c_2\cdots = \tfrac{130}{256} \quad \text{e quindi} \quad c_1.c_2\cdots = \tfrac{1300}{256}$$

da cui $c_1 = 5$ e:

$$0.c_2c_3\cdots = \tfrac{20}{256} \quad \text{e quindi} \quad c_2.c_3\cdots = \tfrac{200}{256}$$

da cui $c_2 = 0$ e:

$$0.c_3c_4\cdots = \tfrac{200}{256} \quad \text{e quindi} \quad c_3.c_4\cdots = \tfrac{2000}{256}$$

da cui, infine, $c_3 = 7$ e:

$$g = 0.507\cdots$$

perciò:

$$\xi = 10^{-1}\cdot 0.507\cdots$$

Infine, si constata che:

$$10^{-1}\cdot 0.50 < 10^{-1}\cdot 0.505 < \xi < 10^{-1}\cdot 0.51$$

e quindi *l'arrotondato di* ξ *è*:

$$\mathrm{rd}(\xi) = 10^{-1}\cdot 0.51$$

Problema 2

(a) La funzione `EG` è definita in $A(x)$ se e solo se $\det A(x)[1] \neq 0$ e $\det A(x)[2] \neq 0$. Poiché $\det A(x)[1] = 1$ e $\det A(x)[2] = x$ si deduce che *la funzione* `EG` *è definita per* $x \neq 0$ e per tali valori di x risulta:

$$S(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x^2 \end{bmatrix}$$

(b) La matrice $A(x)$, simmetrica per ogni $x \in \mathbb{R}$, è definita positiva se e solo se la funzione `EG` è definita in $A(x)$ ed il fattore destro $D(x)$ ha elementi tutti positivi sulla diagonale. Per quanto dedotto nel punto (a), *la matrice* $A(x)$ *è definita positiva se e solo se* $x > 0$ *e* $1 - x^2 > 0$, ovvero *se e solo se* $0 < x < 1$.

Problema 3

Scelta $1, x$ come base dello spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado al più uno, si cercano coefficienti a_0, a_1 tali che, posto $g(x) = a_0 + a_1x$, sia minima la quantità:

$$(g(0)-0)^2 + (g(0)-1)^2 + (g(1)-1)^2 + (g(1)-2)^2$$

Tali coefficienti si ottengono determinando la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema ottenuto imponendo le condizioni di interpolazione $g(0) = 0$, $g(0) = 1$, $g(1) = 1$ e $g(1) = 2$.

Si ottiene: $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 1$, quindi *l'elemento cercato* è:

$$g(x) = \frac{1}{2} + x$$