Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Corso di Laurea in Ingegneria Nucleare e della Sicurezza e Protezione

Appello del 20 settembre 2010

Problema 1

Sia $\xi = 2^{-4}\, 0.1101$ un elemento di $F(2,4)$. Determinare l'arrotondato di ξ in $M = F(10,2)$.

Problema 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la funzione `EG` è definita in $A(x)$ e per tali valori di x indicare la fattorizzazione LR ottenuta.

(b) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la matrice $A(x)$ è definita positiva.

Problema 3

Determinare il polinomio a coefficienti reali di grado al più uno che meglio approssima i dati

$$(0,0) \quad , \quad (0,1) \quad , \quad (1,1) \quad , \quad (1,2)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

Si ha:

$$\xi = 2^{-4}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16}\right) = \tfrac{13}{256}$$

Poiché $\frac{1}{100} < \xi < \frac{1}{10}$, l'esponente di ξ in base dieci è -1, e quindi la frazione è $g = \frac{130}{256}$. La scrittura $0.c_1c_2\cdots$ di g in base dieci si ottiene osservando che:

$$0.c_1c_2\cdots = \tfrac{130}{256} \quad \text{e quindi} \quad c_1.c_2\cdots = \tfrac{1300}{256}$$

da cui $c_1 = 5$ e:

$$0.c_2c_3\cdots = \tfrac{20}{256} \quad \text{e quindi} \quad c_2.c_3\cdots = \tfrac{200}{256}$$

da cui $c_2 = 0$ e:

$$0.c_3c_4\cdots = \tfrac{200}{256} \quad \text{e quindi} \quad c_3.c_4\cdots = \tfrac{2000}{256}$$

da cui, infine, $c_3 = 7$ e:

$$g = 0.507\cdots$$

perciò:

$$\xi = 10^{-1}\cdot 0.507\cdots$$

Infine, si constata che:

$$10^{-1}\cdot 0.50 < 10^{-1}\cdot 0.505 < \xi < 10^{-1}\cdot 0.51$$

e quindi *l'arrotondato di* ξ *è*:

$$\mathrm{rd}(\xi) = 10^{-1}\cdot 0.51$$

Problema 2

(a) La funzione `EG` è definita in $A(x)$ se e solo se $\det A(x)[1] \neq 0$ e $\det A(x)[2] \neq 0$. Poiché $\det A(x)[1] = 1$ e $\det A(x)[2] = x$ si deduce che *la funzione* `EG` *è definita per* $x \neq 0$ e per tali valori di x risulta:

$$S(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x^2 \end{bmatrix}$$

(b) La matrice $A(x)$, simmetrica per ogni $x \in \mathbb{R}$, è definita positiva se e solo se la funzione `EG` è definita in $A(x)$ ed il fattore destro $D(x)$ ha elementi tutti positivi sulla diagonale. Per quanto dedotto nel punto (a), *la matrice* $A(x)$ *è definita positiva se e solo se* $x > 0$ *e* $1 - x^2 > 0$, ovvero *se e solo se* $0 < x < 1$.

Problema 3

Scelta $1, x$ come base dello spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado al più uno, si cercano coefficienti a_0, a_1 tali che, posto $g(x) = a_0 + a_1x$, sia minima la quantità:

$$(g(0)-0)^2 + (g(0)-1)^2 + (g(1)-1)^2 + (g(1)-2)^2$$

Tali coefficienti si ottengono determinando la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema ottenuto imponendo le condizioni di interpolazione $g(0) = 0$, $g(0) = 1$, $g(1) = 1$ e $g(1) = 2$.

Si ottiene: $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 1$, quindi *l'elemento cercato* è:

$$g(x) = \frac{1}{2} + x$$