Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Corso di Laurea in Ingegneria Nucleare e della Sicurezza e Protezione

Appello del 19 luglio 2010

Problema 1

Stimare, in termini di precisione di macchina u, l'errore algoritmico relativo commesso utilizzando la funzione $\phi(\xi) = \mathtt{SEN}(\xi) \otimes \mathtt{COS}(\xi)$ per approssimare la funzione $f(x) = \mathrm{sen}(x)\cos(x)$.

Problema 2

Siano $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ e $b \in \mathbb{R}^3$. Applicando la funzione `EGP` alla matrice A si ottengono le matrici:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare $\det A$.

(b) Indicare, in termini di E, F, G e b, i sistemi di equazioni da risolvere per ottenere la soluzione del sistema $Ax = b$.

Problema 3

Determinare il polinomio a coefficienti reali di grado al più uno che meglio approssima i dati:

$$(-2, 0)\ ,\ (-1, 1)\ ,\ (0, 2)\ ,\ (1, 1)\ ,\ (2, 0)$$

nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

L'errore algoritmico richiesto è, per definizione, il numero reale ϵ_a tale che:

$$\phi(\xi) = (1+\epsilon_a) f(\xi)$$

Introducendo l'errore algoritmico di ciascuna operazione elementare si ha:

$$\phi(\xi) = [(1+\epsilon_{1a}) \operatorname{sen} \xi] \otimes [(1+\epsilon_{2a}) \cos \xi] = (1+\epsilon_{1a})(1+\epsilon_{2a})(1+\epsilon_{3a}) \operatorname{sen} \xi \cos \xi$$

Perciò:

$$1+\epsilon_a = (1+\epsilon_{1a})(1+\epsilon_{2a})(1+\epsilon_{3a})$$

da cui, ricordando che $|\epsilon_{ka}| \leqslant u$ per $k = 1, 2$ e 3, si ottiene:

$$|\epsilon_a| \leqslant 3u + 3u^2 + u^3 \approx 3u$$

Problema 2

Le matrici E, F, G ed A sono legate dalla relazione:

$$EA = FG$$

ovvero, la coppia F, G è una fattorizzazione LR di EA. Perciò si ha:

$$A = E^{\mathsf{T}} F G$$

e quindi:

$$\det A = \det E \det F \det G = 1 \cdot 1 \cdot (-6) = -6$$

Infine, il sistema $Ax = b$ è equivalente al sistema $EAx = Eb$ e, per la relazione iniziale, al sistema $FGx = Eb$. I sistemi da risolvere per ottenere la soluzione del sistema originario sono dunque, nell'ordine:

$$Fc = Eb \qquad , \qquad Gx = c$$

Dal primo sistema, utilizzando la procedura di sostituzione in avanti (la matrice F è triangolare inferiore), si ricava il vettore c; dal secondo sistema, utilizzando la procedura di sostituzione all'indietro (la matrice G è triangolare superiore), si ricava la soluzione x

Problema 3

L'elemento cercato ha la forma $p(t) = a_0 + a_1 t$. I coefficienti a_0 e a_1 si devono determinare in modo che la quantità

$$F(a_0, a_1) = (p(-2) - 0)^2 + (p(-1) - 1)^2 + (p(0) - 2)^2 + (p(1) - 1)^2 + (p(2) - 0)^2$$

assuma valore minimo.

Questo problema equivale a determinare la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

originato imponendo a $p(t)$ di interpolare i dati.

La soluzione del sistema nel senso dei minimi quadrati si ottiene risolvendo il sistema delle equazioni normali:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si ottiene:

$$a_0 = \tfrac{4}{5} \quad , \quad a_1 = 0$$

L'elemento richiesto è quindi: $p(t) = \frac{4}{5}$.