Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Corso di Laurea in Ingegneria Nucleare e della Sicurezza e Protezione

Appello del 28 giugno 2010

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Dopo aver verificato che $1 \in M$ e $3 \in M$, determinare tutti gli elementi $\xi \in M$ tali che $\xi \oslash 3 = 1$.

Problema 2

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinare una fattorizzazione QR di A.

Problema 3

Sia $f(x) = 1 - 6e^{-x}$.

(a) Determinare il numero di zeri di f e separarli.

(b) Per ciascuno degli zeri di f, determinare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo di Newton applicato ad f, ed operando in $\mathbb{R}$, è convergente a tale zero.

Soluzione

Problema 1

Si ha:

$$1 = 2^1 \cdot 0.100 \qquad \text{e} \qquad 3 = 2^2 \cdot 0.110$$

ed entrambi i numeri sono in M.

Per definizione, $\xi \oslash 3 = \mathrm{rd}(\xi/3)$. Posto $x = \xi/3$, si ha:

$$\mathrm{rd}(x) = 1 \quad \text{se e solo se} \quad x \in [2^0 \cdot 0.1111, 2^1 \cdot 0.1001]$$

I numeri di macchina cercati sono dunque quelli tali che:

$$2^2 \cdot 0.101101 \leqslant \xi \leqslant 2^2 \cdot 0.11011$$

Poiché:

$$2^2 \cdot 0.101 = \pi(2^2 \cdot 0.110) < 2^2 \cdot 0.101101 < 2^2 \cdot 0.110 < 2^2 \cdot 0.11011 < \sigma(2^2 \cdot 0.110) = 2^2 \cdot 0.111$$

l'unico elemento di M che soddisfa la richiesta è: $2^2 \cdot 0.110 = 3$.

Alla stessa conclusione si arriva constatando che: $3 \oslash 3 = 1$, $\pi(3) \oslash 3 < 1$ e $\sigma(3) \oslash 3 > 1$ e ricordando che per le proprietà di monotonia della funzione rd, la funzione $\xi \oslash 3$ è *crescente* nella variabile ξ.

Problema 2

Una fattorizzazione QR di A si può determinare in due passi.

(1) Si constata che le colonne di A sono linearmente indipendenti, quindi esistono certamente colonne $w_1, w_2,\ w_3 \in \mathbb{R}^3$ ortogonali rispetto al prodotto scalare canonico e $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23} \in \mathbb{R}$ tali che

$$A = (w_1, w_2, w_3) \begin{bmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dall'uguaglianza letta per colonne si ricava che, dette a_1, a_2, a_3 le colonne di A:

$$a_1 = w_1 \quad , \quad a_2 = w_1\theta_{12} + w_2 \quad , \quad a_3 = w_1\theta_{13} + w_2\theta_{23} + w_3$$

Dalla prima relazione si ricava w_1, dalla seconda si ricavano θ_{12} (moltiplicando scalarmente l'uguaglianza per w_1) e poi w_2, dalla terza si ricavano infine θ_{13} (moltiplicando scalarmente per w_1), θ_{23} (moltiplicando scalarmente per w_2) e poi w_3 ottenendo:

$$A = \Omega\Theta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Si ricavano i fattori richiesti ponendo

$$\Delta = \mathrm{diag}(||w_1||, ||w_2||, ||w_3||) \quad , \quad U = \Omega\Delta^{-1} \quad , \quad T = \Delta\Theta$$

Problema 3

Per la funzione f, definita su $\mathbb{R}$, si ha:

$$f'(x) = 6e^{-x}$$

La derivata prima è sempre diversa da zero, quindi f ha al più uno zero. Inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

dunque: f *ha uno zero*: α.

Un intervallo finito che contiene lo zero si ottiene constatando che:

$$f(1) = 1 - 6e^{-1} < 0 \quad \text{e} \quad f(2) = 1 - 6e^{-2} > 0$$

perciò: $\alpha \in [1, 2]$.

Inoltre:

$$f''(x) = -6e^{-x}$$

e per ogni $x \in [1, 2]$ si ha: $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$. Il metodo di Newton genera una successione certamente convergente ad α a partire da $x_0 = 1$.