Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Corso di Laurea in Ingegneria Nucleare e della Sicurezza e Protezione

Appello del 7 giugno 2010

Problema 1

Sia $M = F(2,4)$. Determinare l'arrotondato di $x = \frac{6}{21}$.

Problema 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & x \end{bmatrix}$$

(a) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la matrice $A(x)$ ammette fattorizzazione LR e per tali valori di x indicarne una.

(b) Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la matrice $A(x)$ è definita positiva.

Problema 3

Sia $h(x) = \frac{1}{2}\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$.

(a) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli.

(b) Per ciascuno dei punti uniti, decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione.

(c) Determinare $x_0 \neq 0$ a partire dal quale la successione generata dal metodo iterativo definito da h, ed operando in $\mathbb{R}$, è convergente a 0.

Soluzione

Problema 1

Poiché $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$, l'esponente di x è -1, e quindi la frazione è $g = \frac{4}{7}$.

La scrittura $0.c_1c_2\cdots$ di g in base due si ottiene osservando che:

$$0.c_1c_2\cdots = \frac{4}{7} \quad \text{e quindi} \quad c_1.c_2\cdots = \frac{8}{7}$$

da cui $c_1 = 1$ e:

$$0.c_2c_3\cdots = \frac{1}{7} \quad \text{e quindi} \quad c_2.c_3\cdots = \frac{2}{7}$$

da cui $c_2 = 0$ e:

$$0.c_3c_4\cdots = \frac{2}{7} \quad \text{e quindi} \quad c_3.c_4\cdots = \frac{4}{7}$$

Confrontando l'ultima uguaglianza con la prima si deduce che la scittura di g è periodica, di periodo tre:

$$g = 0.100100\cdots$$

perciò:

$$x = 2^{-1}\cdot 0.100100\cdots$$

e $x \notin M$.

Infine, si constata che:

$$2^{-1}\cdot 0.1001 < x < 2^{-1}\cdot 0.10011 < 2^{-1}\cdot 0.1010$$

e quindi *l'arrotondato di x è*:

$$\mathrm{rd}(x) = 2^{-1}\cdot 0.1001$$

Problema 2

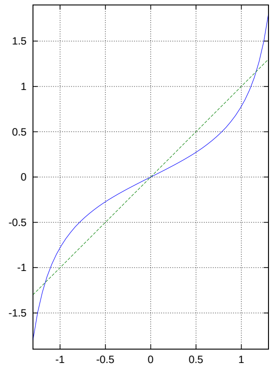
(a) La funzione `EG` è definita in $A(x)$ se e solo se $\det A(x)[1] \neq 0$, $\det A(x)[2] \neq 0$ e $\det A(x)[3] \neq 0$. Poiché $\det A(x)[1] = 1$, $\det A(x)[2] = 1$ e $\det A(x)[3] = 2$, si deduce che *la matrice $A(x)$ ammette un'unica fattorizzazione LR per ogni $x \in \mathbb{R}$* che risulta:

$$S(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix}$$

(b) La matrice $A(x)$, simmetrica per ogni $x \in \mathbb{R}$, è definita positiva se e solo se la funzione `EG` è definita in $A(x)$ ed il fattore destro $D(x)$ ha elementi tutti positivi sulla diagonale. Per quanto dedotto nel punto (a), *la matrice $A(x)$ è definita positiva se e solo se $x > 2$.*

Problema 3

(a) Il numero di punti uniti si deduce dal disegno in cui sono rappresentati i grafici delle funzioni $y = h(x)$ e $y = x$:



La funzione h ha tre punti uniti: $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = -\alpha_1$ (si osservi che la funzione h è *dispari*). Una conferma analitica del numero di punti uniti si può ottenere introducendo la funzione:

$$F(x) = h(x) - x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

e constatando che:

- $F^{(3)}(x) > 0$ per ogni $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e quindi F ha al più tre zeri (quindi h al più tre punti uniti);
- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} F(x) = +\infty$ e $F(\frac{\pi}{4}) < 0$ quindi, essendo F continua, esiste α_3 zero di F in $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.
- F è dispari.

Si deduce che: *h ha tre punti uniti* $\alpha_1 \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = -\alpha_1$.

(b) La derivata di h è:

$$h'(x) = \frac{1}{2(\cos x)^2}$$

Per α_2 si ha: $h'(\alpha_2) = h'(0) = \frac{1}{2}$ e quindi: *il metodo iterativo definito da h è utilizzabile per approssimare α_2*. Per α_1 e α_3, come si deduce anche dalla figura, si ha $h'(\alpha_1) > 1$ e $h'(\alpha_3) > 1$, dunque: *il metodo iterativo definito da h non è utilizzabile per approssimare né α_1 né α_3*.

(c) Per determinare x_0 con le proprietà richieste si utilizza il Teorema di convergenza locale. Si ha:

$$0 < h'(x) < 1 \quad \text{se e solo se} -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

Se ne deduce che: *qualsiasi $x_0 \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ soddisfa la richiesta.*