Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Corso di Laurea in Ingegneria Nucleare e della Sicurezza e Protezione

Appello del 15 febbraio 2010

Problema 1

Sia $M = F(2,3)$. Determinare tutti gli $\xi \in M$ tali che $\xi \ominus 2 = 1$.

Problema 2

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare una fattorizzazione QR di A.

(b) Utilizzare la fattorizzazione QR determinata al punto precedente per risolvere il sistema $Ax = b$.

Problema 3

Determinare la forma di Lagrange del polinomio che interpola i dati $(0,1)$, $(1,1)$, $(-1,0)$.

Soluzione

Problema 1

Si verifica immediatamente che $2 \in M$ e $1 \in M$. Cerchiamo inizialmente tutti i numeri ξ *reali* (non solo quelli in M) tali che:

$$\mathrm{rd}(\xi - 2) = 1$$

Ricordando la definizione di funzione arrotondamento in M, detti m_1 il punto centrale dell'intervallo di estremi $\pi(1), 1$ e m_2 il punto centrale dell'intervallo di estremi $1, \sigma(1)$, i valori cercati sono:

$$\xi - 2 \in [m_1, m_2] = [2^0\, 0.1111; 2^1\, 0.1001]$$

ovvero:

$$\xi \in [2 + m_1, 2 + m_2] = [2^2\, 0.101111; 2^2\, 0.11001]$$

Infine, si constata che *l'unico elemento di M appartenente all'intervallo individuato è* $2^2\, 0.110 = 3$.

Problema 2

Una fattorizzazione QR di A si può determinare in due passi.

(1) Si constata che le colonne di A sono linearmente indipendenti, quindi esistono certamente colonne $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ ortogonali rispetto al prodotto scalare canonico e $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23} \in \mathbb{R}$ tali che

$$A = (w_1, w_2, w_3) \begin{bmatrix} 1 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ 0 & 1 & \theta_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dall'uguaglianza letta per colonne si ricava che, dette a_1, a_2, a_3 le colonne di A:

$$a_1 = w_1 \quad , \quad a_2 = w_1\theta_{12} + w_2 \quad , \quad a_3 = w_1\theta_{13} + w_2\theta_{23} + w_3$$

Dalla prima relazione si ricava w_1, dalla seconda si ricavano θ_{12} (moltiplicando scalarmente l'uguaglianza per w_1) e poi w_2, dalla terza si ricavano infine θ_{13} (moltiplicando scalarmente per w_1), θ_{23} (moltiplicando scalarmente per w_3) e poi w_3 ottenendo:

$$A = \Omega\Theta = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) Si ricavano i fattori richiesti ponendo

$$\Delta = \mathrm{diag}(||w_1||, ||w_2||, ||w_3||) \quad , \quad U = \Omega\Delta^{-1} \quad , \quad T = \Delta\Theta$$

Dunque, *una fattorizzazione QR di A è*

$$A = UT = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Dalla fattorizzazione ottenuta si ricava il sistema

$$Tx = U^{\mathsf{T}}b$$

equivalente ad $Ax = b$. *La soluzione* (ottenuta prima calcolando $c = U^{\mathsf{T}}b$ e poi risolvendo con la procedura di sostituzione all'indietro il sistema $Tx = c$) *è*

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Poiché si hanno tre dati (con prime coordinate distinte), il polinomio interpolante si cerca in $P_2(\mathbb{R})$, l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado al più due.

Del polinomio si chiede la forma di Lagrange, quindi occorre usare la corrispondente base di $P_2(\mathbb{R})$:

$$\ell_{2,0}(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{-1} \quad , \quad \ell_{2,1}(x) = \frac{x(x+1)}{2} \quad , \quad \ell_{2,2}(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

e *il polinomio cercato è:*

$$p(x) = 1 \cdot \ell_{2,0}(x) + 1 \cdot \ell_{2,1}(x) + 0 \cdot \ell_{2,2}(x)$$