Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Corso di Laurea in Ingegneria Nucleare e della Sicurezza e Protezione

Appello del 26 gennaio 2010

Problema 1

Siano $M = F(2,4)$ e rd la funzione di arrotondamento in M. Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $\mathrm{rd}(x) = 2^{-2} \cdot 0.1010$.

Problema 2

Siano

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e M tali che $(S, D) = \mathtt{EG}(M)$.

(a) Decidere se M sia simmetrica definita positiva.

(b) Calcolare $||M||_2$.

Problema 3

Sia $h(x) = \frac{1}{9} - 3x^3$.

(a) Determinare il numero di punti uniti di h e separarli.

(b) Per ciascuno dei punti uniti, decidere se il metodo iterativo definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, determinare x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo ed operando in $\mathbb{R}$ risulta convergente.

Soluzione

Problema 1

Sia $\xi = 2^{-2} \cdot 0.1010$; dalla definizione di funzione arrotondamento si deduce che, detti $m_1 = 2^{-2} \cdot 0.10011 = \frac{19}{128}$ il punto medio del segmento di estremi $\pi(\xi)$, ξ e $m_2 = 2^{-2} \cdot 0.10101 = \frac{21}{128}$ quello del segmento di estremi ξ, $\sigma(\xi)$, gli $x \in \mathbb{R}$ cercati sono:

$$m_1 \leqslant x \leqslant m_2$$

Problema 2

(a) Poiché risulta

$$D = \mathrm{diag}(2, \tfrac{3}{2}, -1)S^{\mathsf{T}}$$

si constata che M *è simmetrica*.

Si ricordi che una condizione equivalente all'essere M definita positiva è che gli elementi sulla diagonale del fattore destro della fattorizzazione LR determinata da $\mathtt{EG}(M)$ siano tutti positivi. Gli elementi sulla diagonale della matrice D non sono tutti positivi quindi M *non è definita positiva*.

(b) Si ricordi che

$$||M||_2 = \sqrt{\max\{\, |\lambda| \text{ tali che } \lambda \text{ è autovalore di } M^{\mathsf{T}}M \,\}}$$

Poiché M è simmetrica si ha $M^{\mathsf{T}}M = M^2$ e quindi gli autovalori cercati si ottengono prendendo il quadrato di ciascuno degli autovalori di M. Questi ultimi si deducono dal polinomio caratteristico di M:

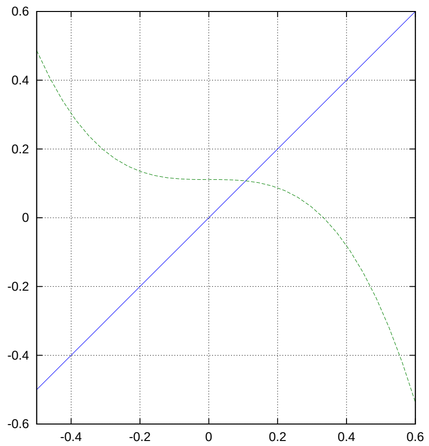
$$p(x) = [(2-x)^2 - 1](-1-x) = (2-x-1)(2-x+1)(-1-x) = (1-x)(3-x)(-1-x)$$

quindi:

$$||M||_2 = \sqrt{\max\{\,1, 1, 9\,\}} = 3$$

Problema 3

(a) Il grafico di $y = h(x)$ e di $y = x$ fa supporre che esista un punto unito nell'intervallo $[0, \frac{1}{5}]$.



Per verificare che h ha effettivamente un solo punto unito e che tale punto unito è nell'intervallo indicato, introduciamo la funzione $F(x) = x - h(x)$. Si constata che:

- Gli zeri di F sono tutti e soli i puntii uniti di h;
- $F'(x) = 1 + 9x^2 > 0$, quindi F non può avere più di uno zero;
- $F(0) < 0$ e $F(\frac{1}{5}) > 0$, quindi l'unico zero di F è nell'intervallo $[0, \frac{1}{5}]$.

Se ne conclude che h *ha un solo punto unito, nell'intervallo* $[0, \frac{1}{5}]$.

(b) Poiché $h'(x) = -9x^2$, per ogni $x \in [0, \frac{1}{5}]$ si ha

$$0 \leqslant |h'(x)| \leqslant \tfrac{9}{25} < 1$$

Dunque l'intervallo $[0, \frac{1}{5}]$ e la funzione h verificano le prime due ipotesi del Teorema di Convergenza Locale. Questo basta a garantire che *il metodo definito da h è utilizzabile per approssimare il punto unito.*

Un valore di x_0 a partire dal quale la successione generata dal metodo ed operando in $\mathbb{R}$ risulta convergente è l'estremo dell'intervallo più vicino al punto unito. Poiché $F(\frac{1}{10}) < 0$, si ha $x_0 = \frac{1}{5}$.