Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

Corso di Laurea in Ingegneria Nucleare e della Sicurezza e Protezione

Appello dell'8 gennaio 2010

Problema 1

Siano $M = F(2,3)$ e $x = \frac{1}{5}$.

(a) Decidere se $x \in M$.

(b) Calcolare $\mathrm{rd}(x)$ e $\delta(x)$.

Problema 2

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ x & x & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare l'insieme T degli x per i quali la funzione `EG` è definita in $A(x)$.

(b) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ discutere l'esistenza di fattorizzazioni LR di $A(x)$.

Problema 3

Determinare gli elementi di $\langle 1, t \rangle$ che meglio approssimano i dati $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(-1,0)$ nel senso dei minimi quadrati.

Soluzione

Problema 1

(a) Tutti gli elementi non nulli di M sono numeri razionali con denominatore potenza di due. Poiché x è razionale ma ha denominatore non potenza di due:

x non è elemento di M

Alternativamente, essendo $x \neq 0$, occorre verificare se la frazione di x in base due è compatibile con la precisione (tre) di M. Per calcolare l'esponente e la frazione di x relativi alla base due si constata che $2^{-3} < x < 2^{-2}$ e perciò l'esponente vale -2 e (di conseguenza) la frazione vale $4x = \frac{4}{5}$. Poiché la scrittura della frazione in base due risulta essere $\frac{4}{5} = 0.11001100\ldots$, se ne deduce che *$x$ non appartiene ad M.*

(b) Per determinare l'arrotondato di x, si considerano i numeri di macchina adiacenti ad x: $\xi_1 = 2^{-2}\,0.110$ (il più grande elemento di M minore di x) e $\xi_2 = \sigma(\xi_1) = 2^{-2}\,0.111$ (il più piccolo elemento di M maggiore di x). Siccome x risulta minore del punto medio del segmento di estremi ξ_1, ξ_2 si conclude che

l'arrotondato di x è: $\mathrm{rd}(x) = \xi_1 = 2^{-2}\,0.110$

Infine, dalla definizione:

l'errore assoluto è: $\delta(x) = \mathrm{rd}(x) - x = -\frac{1}{80}$

Problema 2

(a) La funzione `EG` è definita in $A(x)$ se e solo se $\det A(x)[1] \neq 0$ e $\det A(x)[2] \neq 0$. Poiché $\det A(x)[1] = 1$ e $\det A(x)[2] = -x$, si ha

$$T = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(b) Per $x \in T$ la funzione `EG` è definita in $A(x)$ e quindi

per $x \in T$, $A(x)$ ha una sola fattorizzazione LR

Poiché $A(0)$ è invertibile, e $0 \notin T$:

la matrice $A(0)$ non ammette fattorizzazione LR

Problema 3

Imponendo le condizioni di interpolazione si ottiene il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

le cui soluzioni nel senso dei minimi quadrati danno i coefficienti delle combinazioni lineari richieste. Le equazioni normali risultano

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui $a_0 = \frac{5}{14}$ e $a_1 = \frac{3}{14}$ (si osservi che si ottiene una sola soluzione, come dovevamo aspettarci, essendo linearmente indipendenti ...).

Infine

l'elemento (unico) che meglio approssima i dati è: $g(t) = \frac{5}{14} + \frac{3}{14}t$