Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Test di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

14 Settembre 2009

- Tempo a disposizione: 60 minuti

Cognome:	
Nome:	

Numero di matricola:

RISPOSTE

- Problema 1
  (a)
  (b)
  (c)

- Problema 2
  (a)
  (b)
  (c)

- Problema 3
  (a)
  (b)
  (c)

- Problema 4

- `Problema 1`

  Sia $M = F(\beta, m)$ un insieme di numeri di macchina. Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se sia vero o falso:

  (a) Per ogni $\xi \in M$ si ha che $-\xi \in M$.

  (b) Per ogni $\xi \in M$ si ha che $|\xi| \in M$.

  (c) Per ogni $\xi \in M$ si ha che $\xi/\beta \in M$.

- `Problema 2`

  Sia U, T una fattorizzazione QR di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$.

  (a) Determinare $\|U\|_2$.

  (b) Decidere se i sistemi $Ax = b$ e $Tx = Ub$ sono equivalenti.

  (c) Decidere se sussiste l'uguaglianza: $AU^{\mathsf{T}} = T$.

- `Problema 3`

  Si consideri il metodo iterativo definito dalla funzione $h(x) = x^3$.

  (a) Determinare i punti uniti di h.

  (b) Sia x_k la successione generata dal metodo iterativo a partire da $x_0 \in \mathbb{R}$. Decidere se per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$.

  (c) Calcolare l'ordine di convergenza del metodo iterativo al punto unito $\alpha = 0$.

- `Problema 4`

  Determinare la forma di Lagrange del polinomio che interpola i dati $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, -1)$.

SOLUZIONE

- **Problema 1**

L'insieme dei numeri di macchina è simmetrico rispetto a zero, perciò l'asserto (a) è *vero*. Per lo stesso motivo l'asserto (b) è *vero*. Anche l'asserto (c) è *vero*. Infatti: se $\xi = 0$ anche $\xi/\beta = 0$, altrimenti ξ/β è il numero di macchina che si ottiene da ξ diminuendo di uno l'esponente.

- **Problema 2**

Siccome la matrice U è ortogonale, per ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ si ha $\|Ux\|_2 = \sqrt{x^\top U^\top U x} = \sqrt{x^\top x} = \|x\|_2$ e quindi, dalla definizione di norma due, risulta $\|U\|_2 = 1$.

Poiché U, T è una fattorizzazione QR di A, il sistema $Ax = b$ è certamente equivalente al sistema $Tx = U^\top b$. Dunque, salvo casi particolari, i sistemi $Ax = b$ e $Tx = Ub$ *non* sono equivalenti.

Per lo stesso motivo, si ha certamente $U^\top A = T$ e quindi, salvo casi particolari, l'uguaglianza è *falsa*.

- **Problema 3**

I punti uniti di h sono gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $h(x) = x$. Dunque: $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$.

Poichè zero è punto unito di h, esiste certamente qualche valore di x_0 a partire dal quale la successione generata converge a zero. Però h ha anche punti uniti diversi da zero, dunque esistono certamente valori di x_0 a partire dai quali la successione generata non converge a zero. L'asserto è perciò *falso*.

L'ordine di convergenza al punto unito $\alpha = 0$ è determinato dal valore delle derivate della funzione h in α. Poiché

$$h^{(1)}(\alpha) = h^{(2)}(\alpha) = 0 \qquad \text{e} \qquad h^{(3)}(\alpha) \neq 0$$

l'ordine di convergenza è *tre*.

- **Problema 4**

Gli elementi della base di Lagrange, considerando i dati nell'ordine in cui sono assegnati, sono

$$\ell_0(x) = \frac{x^2 - x}{2} \quad , \quad \ell_1(x) = 1 - x^2 \quad , \quad \ell_2(x) = \frac{x^2 + x}{2}$$

La forma di Lagrange del polinomio interpolante è dunque

$$p(x) = \ell_1(x) - \ell_2(x) = -\tfrac{3}{2}\,x^2 - \tfrac{1}{2}\,x + 1$$