Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Test di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

20 Luglio 2009

- Tempo a disposizione: 60 minuti

Cognome:

Nome:

Numero di matricola:

RISPOSTE

- `Problema 1`
  (a)
  (b)
  (c)

- `Problema 2`
  (a)
  (b)

- `Problema 3`
  (a)
  (b)

- `Problema 4`

- `Problema 1`

  Siano M un insieme di numeri di macchina ed u la precisione di macchina. Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se sia *vero* o *falso*:

  (a) Per ogni $\xi \in M$ si ha che $|\xi| \geqslant u$.

  (b) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'errore relativo commesso sostituendo x con il suo arrotondato non supera u.

  (c) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'errore assoluto commesso sostituendo x con il suo arrotondato non supera u.

- `Problema 2`

  Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, sia

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

  (a) Specificare per quali valori del parametro α la matrice A ammette fattorizzazione LR.

  (b) Specificare per quali valori del parametro α la matrice A ammette fattorizzazione QR.

- `Problema 3`

  Si consideri la funzione definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ da $f(x) = x^2 - 1$.

  (a) Indicare il secondo elemento (x_1) della successione generata dal metodo di Newton applicato ad f a partire da $x_0 = -\frac{1}{2}$.

  (b) Indicare $x_0 \in [-\frac{1}{2}, 3]$ a partire dal quale la successione generata dal metodo di Newton (operando in $\mathbb{R}$) sia convergente.

- `Problema 4`

  Determinare la forma di Newton del polinomio che interpola i dati $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$, $(3, 0)$.

SOLUZIONE

- **`Problema 1`**

Qualunque insieme di numeri di macchina contiene 0, perciò l'asserto (a) è *falso.* Per quanto riguarda l'errore commesso sostituendo ad $x \in \mathbb{R}$ il suo arrotondato, si ricorda che la funzione errore assoluto $\delta(x)$ non è limitata, mentre per la funzione errore relativo $\epsilon(x)$ si ha la limitazione $|\epsilon(x)| \leqslant u$. Perciò l'asserto (b) è *vero*, l'asserto (c) è *falso.*

- **`Problema 2`**

Siccome $\det A[1] = \alpha$, `EG` è definita se e solo se $\alpha \neq 0$. Se ne deduce che la matrice ammette certamente fattorizzazione LR (unica) per $\alpha \neq 0$. Per $\alpha = 0$ la funzione `EG` non è definita e la matrice risulta invertibile, quindi non ammette fattorizzazione LR. Dunque: *la matrice ammette fattorizzazione LR solo per ogni $\alpha \neq 0$.*

Per quanto riguarda l'esistenza di fattorizzazioni QR, si osserva che A è invertibile per tutti i valori di α e se ne deduce che *la matrice ammette fattorizzazione QR per ogni valore di α.*

- **`Problema 3`**

Per definizione si ha
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$
da cui, sostituendo il valore assegnato per x_0: $x_1 = -\frac{5}{4}$.

L'intervallo assegnato contiene uno zero della funzione ($x^* = 1$), ma siccome $f'(x) = 2x$, non sono verificate le condizioni necessarie per poter utilizzare il criterio di scelta del punto iniziale specifico per il metodo di Newton. Si osserva, però, che siccome $f^{(2)}(x) = 2$, un intervallo che contiene x^* e che verifica le condizioni è $[\frac{1}{2}, 3]$, dunque: *la successione generata dal metodo di Newton (operando in $\mathbb{R}$) a partire da $x_0 = 3$ risulta convergente ad x^*.*

- **`Problema 4`**

I dati sono quattro coppie, perciò il polinomio avrà grado al più tre.

Mantenendo i punti nell'ordine in cui sono assegnati, la base di Newton risulta:
$$\langle 1, x, x(x+1), x(x+1)(x-1) \rangle$$
e il sistema da risolvere per determinare i coefficienti:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 12 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
Se ne ricava la forma di Newton richiesta:
$$1 + x - \frac{1}{6}x(x+1)(x-1)$$