



Test di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

29 Giugno 2009

- Tempo a disposizione: 60 minuti

Cognome:

Nome:

Numero di matricola:

--	--	--	--	--	--	--

RISPOSTE

• Problema 1

(a)

• Problema 2

(b)

(a)

• Problema 3

(b)

• Problema 4

• Problema 1

Si consideri l'insieme dei numeri di macchina $M = F(10, 3)$. Indicare il numero di elementi di M appartenenti all'intervallo $[10^{-1}, 10]$.

• Problema 2

Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Indicare il costo del calcolo di $uv^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- (b) Se il calcolatore esegue una operazione elementare in 10^{-9} secondi, specificare il tempo impiegato per il calcolo di uv^T nel caso in cui $n = 1000$.

• Problema 3

Sia h la funzione definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, da

$$h(x) = \frac{x}{2}(4 - x).$$

- (a) Determinare i punti fissi di h .
- (b) Per ciascun punto fisso, decidere se il metodo ad un punto definito da h sia utilizzabile per l'approssimazione e, in caso affermativo, specificare l'ordine di convergenza.

• Problema 4

Siano

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Determinare la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema $Ax = b$.

SOLUZIONE

• Problema 1

Poiché $10^{-1} = 10^0 \cdot 0.100$ e $10^1 = 10^2 \cdot 0.100$, gli elementi di M che appartengono all'intervallo richiesto sono *tutti quelli (positivi) con esponente 0 oppure 1 ed il più piccolo (positivo) con esponente 2*. I numeri di macchina positivi con esponente dato sono 900, quindi:

l'intervallo $[10^{-1}, 10]$ contiene $900 + 900 + 1 = 1801$ numeri di macchina

• Problema 2

- (a) L'elemento di posto i, j della matrice uv^T vale $u_i v_j$, dunque il calcolo di uv^T richiede n^2 prodotti, e...
- (b) ...il tempo necessario per calcolare uv^T è:

$$n^2 \times (\text{tempo per eseguire una operazione elementare}) = 10^6 \times 10^{-9} \text{ s} = 10^{-3} \text{ s}$$

• Problema 3

- (a) I punti uniti di h sono gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $h(x) = x$, ovvero $x = 0$ e $x = 2$.
- (b) Poiché $h'(0) = 2$, il metodo ad un punto definito da h non è utilizzabile per approssimare il punto unito $x = 0$; invece, essendo $h'(2) = 0$, il metodo ad un punto definito da h è utilizzabile per approssimare il punto unito $x = 2$, e l'ordine di convergenza a 2 risulta 2 (si ha anche $h''(2) \neq 0$).

• Problema 4

La matrice A ha colonne linearmente indipendenti, perciò il sistema ha una sola soluzione nel senso dei minimi quadrati, x^* , che si può calcolare utilizzando le equazioni normali:

$$A^T A x^* = A^T b$$

Si ottiene:

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$