Dipartimento di Matematica Applicata
« Ulisse Dini »

Test di Calcolo Numerico

Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica

11 Giugno 2009

- Tempo a disposizione: 60 minuti

Cognome:	
Nome:	

Numero di matricola:

RISPOSTE

- **Problema 1**

- **Problema 2**
  (a)
  (b)
  (c)
  (d)

- **Problema 3**

- **Problema 4**

- `Problema 1`

  Si consideri l'insieme dei numeri di macchina $M = F(2, m)$. Indicare il valore del minimo intero m tale che $17 \in M$.

- `Problema 2`

  Sia $P \in \mathbb{R}^{15\times 15}$ una matrice di permutazione. Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se sia vero o falso:

  (a) $PP^T = I$, essendo I la matrice identica.

  (b) Per ogni $x \in \mathbb{R}^{15}$, $\|Px\|_2 = \|x\|_2$.

  (c) Per ogni $x \in \mathbb{R}^{15}$, $\|Px\|_1 = \|x\|_1$.

  (d) $\det(P) = 2$.

- `Problema 3`

  Utilizzando il metodo di bisezione per approssimare uno zero di una funzione continua su un intervallo I_0 di ampiezza a_0 si ottiene la successione di intervalli $I_1, I_2, \ldots$. Detta a_k l'ampiezza dell'intervallo I_k, determinare k in modo tale che

$$a_k < 10^{-3}\, a_0$$

- `Problema 4`

  Sia f la funzione definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, da $f(x) = \operatorname{sen}(2x) + 5x$ e siano $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{2}$. Stimare sull'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ l'errore commesso approssimando la funzione f con il polinomio che ne interpola i valori in x_0 ed x_1.

SOLUZIONE

- **Problema 1**

Poiché la scrittura posizionale di 17 in base 2 è 10001, la minima precisione è:

$$m = 5$$

- **Problema 2**

(a) Poiché una matrice di permutazione è *ortogonale* (le colonne sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ rispetto al prodotto scalare canonico), si ha $P^{-1} = P^{\mathsf{T}}$, perciò: *vero*.

(b) Il vettore Px si ottiene da x permutandone le componenti: questa operazione non fa cambiare il valore della somma dei quadrati delle componenti, dunque: *vero*.

(c) Ragionando come al punto (b): *vero*.

(d) Poiché le colonne di P si ottengono permutando le colonne della matrice identica, il determinante di P può valere 1 oppure -1, perciò: *falso*.

- **Problema 3**

Nel metodo di bisezione, l'ampiezza dell'intervallo I_k è metà di quella del precedente. Perciò si ha

$$a_k = \frac{a_0}{2^k}$$

Il minimo valore di k che rende verificata la richiesta è:

$$k = 10$$

- **Problema 4**

Detto $p(x)$ il polinomio che interpola i valori di f in 0 e $\frac{\pi}{2}$, l'errore di ricostruzione sull'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ si stima sapendo che per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ esiste $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tale che

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2)}(\theta)}{2!}(x - x_0)(x - x_1)$$

Ne segue la stima richiesta:

$$|f(x) - p(x)| \leqslant \frac{M_2}{8} h^2$$

dove M_2 è un valore maggiore o uguale al massimo della derivata seconda di f sull'intervallo, ed h è l'ampiezza dell'intervallo.

Nel caso in esame si ha: $M_2 = 4$ e $h = \frac{\pi}{2}$ da cui:

$$|f(x) - p(x)| \leqslant \frac{\pi^2}{8}$$