Es: Siano $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$ con ph canonico. Decidere se:

- $a \perp b$;
- $\| a+b \|^2 = \| a \|^2 + \| b \|^2$;
- a, b è una fam lin indip.

Es: Siano $a, b \in \mathbb{C}^3$ con ph canonico i vettori dell'es precedente. Determinare la proiez ortogonale e la comp normale di a risp a b

---

Es: Si cons il sistema di eq.ni lineari:

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ i x_2 - x_4 = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{C}^4$$

e sia W l'ins delle sue soluzioni. Determinare:

- una rappres param di W;
- una base di W
- una base o n ($\mathbb{C}^4$ con ph canonico) di W

Es: Decidere se la fam $\binom{1}{0}, \binom{0}{1} \in \mathbb{C}^2$ sia una base di $\mathbb{C}^2$ sp vett su $\mathbb{R}$.

Es: Verif che la fam $\binom{1}{0}, \binom{0}{1}, \binom{i}{0}, \binom{0}{i} \in \mathbb{C}^2$ è una base di $\mathbb{C}^2$ s.v. su $\mathbb{R}$.

Es: Sia $c = 2 - 2i$

(A) Rappres sul piano di Gauss:

$$c, \ \bar{c}, \ |c|, \ c^{-1}$$

(B) Indicare tutti gli argomenti di c e poi l'argomento principale $\arg(c)$;

(C) Indicare: $|\bar{c}|$, $\arg(\bar{c})$, $|c^{-1}|$, $\arg(c^{-1})$.

Es: Indicare la forma algebrica del numero complesso c t.c.

$$|c| = 7, \quad \arg(c) = -\frac{\pi}{3}$$

e poi calcolare modulo ed argomento principale di c^3.

Es: Siano $a, b \in \mathbb{C}$ t.c. $|a| = 2$, $\arg(a) = \frac{\pi}{2}$, $|b| = 1$, $\arg(b) = \pi$.

(A) Rappres a e b sul piano di Gauss;
(B) Calcolare $|ab|$ e $\arg(ab)$.

Es: Si rappres $\mathbb{R}^2$ su un piano α.
Siano $A \equiv \binom{3}{1}$, $B \equiv \binom{1}{0}$

- Determinare $d(A, B)$;
- Calcolare $\vec{LB} - \vec{LA}$;
- Decidere se $\vec{LA}, \vec{LB}$ sia una fam lin indip.

Es: Sia $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ una base di $\mathbb{R}^2$.

- Determ $x \in \mathbb{R}^2$ t.c. $x \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- determ le coord di $y = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ risp alla base $\mathcal{B}$.

Es: Si rappres $\mathbb{R}^3$ nello spazio. Siano v l'elem di V_L che rappres $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e w quello che rappres $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Decidere:

- quale elem di $\mathbb{R}^3$ è rappres da $4v - 6w$;
- se $v \perp w$;
- se v, w lin indip.

Es: sia $W \subset \mathbb{R}^3$ l'ins individuato dalla rappres param:

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Dare una rappres cartesiana di W.

Es: Siano $p(x) = 3x^3 - 1$, $q(x) = x^2 - 1 \in \mathbb{R}[x]$.
Decidere se $p(x)$ sia divisibile per $q(x)$.

Es: Siano $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^{7 \times 3}$, $b = \begin{bmatrix} i \\ 1+i \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$.

- Calcolare $Ab \in \mathbb{C}^7$;
- Determinare $x \in \mathbb{C}^3$ t.c. $Ax = 7a_1 - 2i a_3 \in \mathbb{C}^7$.

Es: Sia $A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$. Determinare tutte le $X \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ t.c. $AX = I$.

Es: Sia $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 3}$, e $g = L_M$.

- Determinare $g \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$;
- Verificare che $W = \{ x \in \mathbb{C}^3 \mid g(x) = 0 \} \subset \mathbb{C}^3$ è un ssv di $\mathbb{C}^3$;
- Determinare una base di W.

Es: Sia $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $\gamma = L_A$.

Determinare $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ t.c.

$$3\gamma - 2\gamma^2 = L_B.$$

Es: Decidere se la fam $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ di elem di $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ (sp vett su $\mathbb{R}$) sia una base di $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Es: $\mathbb{C}^3$ sp vett su $\mathbb{C}$. Estrarre da $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ una fam lin indip, e decidere se tale fam sia una base di $\mathbb{C}^3$.

Es: Indicare una rappres param del piano α per il punto di coordinate $\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ e parallelo ai vettori:

$$v \equiv \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad w \equiv \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Dedurne una rappres cartesiana di α.

Es: Sia α il piano di rappres cartesiana:

$$x_1 - x_2 - x_3 = 2, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

- decidere se $A \equiv \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ appartiene ad α;
- dare una rappres param della retta $r \perp \alpha$ e contenente A.

Es: Sia γ il piano di rappres cartesiana:

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

- Indicare due vettori lin indip di γ;
- Dare una descriz param di γ.
- Verificare che $A \equiv \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ non appartiene a γ, e dare una descriz cartesiana del piano $\alpha \parallel \gamma$ e contenente A.

Es: In $\mathbb{R}^3$ si cons i ssv.

$$V = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \quad W = \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

- determ una base di $V+W$;
- determ una base di $V \cap W$.

Es: Si cons i ssv di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \{ \text{soluz dell' eq}: \ x_1 - x_3 = 0, \ x \in \mathbb{R}^4 \}$$

$$V = \{ \text{soluz dell' eq}: \ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \ x \in \mathbb{R}^4 \}$$

- determ una base di $W \cap V$;
- determ una base di $W + V$.

Es: Decidere se le seg scritture sono corrette:

- $\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, in $\mathbb{R}^2$ sp vett su $\mathbb{R}$;
- $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \right\rangle$, in $\mathbb{R}^2$ s v su $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{C}^2 = \left\langle \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix} \right\rangle$, in $\mathbb{C}^2$ s v su $\mathbb{C}$;
- La somma $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$ e' diretta, in $\mathbb{R}^2$ s v su $\mathbb{R}$.