Complementi di Algebra e Fondamenti di Geometria

Capitolo 4

Decomposizione ai valori singolari

L. Aceto, M. Ciampa

Ingegneria Elettrica, a.a. 2009/2010

Capitolo 4

Decomposizione ai Valori Singolari

In questo capitolo si definisce la *decomposizione ai valori singolari* di una matrice ad elementi in $\mathbb{C}$ e, dopo averne dato una *interpretazione geometrica*, si descrive una *procedura di calcolo*. Infine, si illustrano applicazioni della decomposizione introdotta allo *studio dei sistemi di equazioni lineari*: si introducono le nozioni di *soluzione nel senso dei minimi quadrati* di un sistema di equazioni e di *elemento di minima norma* dell'insieme delle soluzioni e si mostra come determinarle, giungendo così alla nozione di *matrice pseudoinversa*.

Gli elementi di una matrice $n \times k$ di nome A saranno indicati con a_{ij}. Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times k}$ si dice *ad elementi reali* se $a_{ij} \in \mathbb{R}$ per ogni i, j.

Si indicano con $e_1, \dots, e_n$ gli elementi della base canonica di $\mathbb{C}^n$. Se $a, b \in \mathbb{C}^n$, la sigla $a \bullet b$ indica il *prodotto hermitiano canonico* di a e b, e $||a||$ indica la norma euclidea di a.

4.1 Definizione (decomposizione ai valori singolari)

Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times k}$. Una *decomposizione ai valori singolari* di A è una terna di matrici U, Σ, V tali che:

- $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $V \in \mathbb{C}^{k\times k}$ sono matrici *unitarie*;
- $\Sigma \in \mathbb{C}^{n\times k}$ è *diagonale* (ovvero $\sigma_{ij} = 0$ per $i \neq j$), *ad elementi reali* e, posto $p = \min(k, n)$, con $\sigma_{11} \geqslant \sigma_{22} \geqslant \cdots \geqslant \sigma_{pp} \geqslant 0$;
- $A = U\Sigma V^{\mathsf{H}}$.

Gli elementi $\sigma_1 = \sigma_{11}, \dots, \sigma_p = \sigma_{pp}$ si chiamano *valori singolari* di A.

4.2 Esempio

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 2}$$

La terna

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

è una decomposizioe ai valori singolari di A e $\sqrt{2}, 0$ sono i valori singolari di A.

4.3 Osservazione (interpretazione geometrica)

Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times k}$ e $U = (u_1, \dots, u_n)$, Σ, $V = (v_1, \dots, v_k)$ una decomposizione ai valori singolari di A.

- $u_1, \ldots, u_n$ è una *base ortonormale* di $\mathbb{C}^n$;
- $v_1, \ldots, v_k$ è una *base ortonormale* di $\mathbb{C}^k$;
- sia $x \in \mathbb{C}^k$; posto $y = Ax$ e detti $x' = V^{\mathsf{H}}x$ il vettore delle coordinate di x rispetto alla base $v_1, \ldots, v_k$, $y' = U^{\mathsf{H}}y$ il vettore delle coordinate di y rispetto alla base $u_1, \ldots, u_n$ si ha
$$y' = U^{\mathsf{H}}y = U^{\mathsf{H}}Ax = U^{\mathsf{H}}AVx' = \Sigma\, x'$$
ovvero: *nel mondo delle coordinate, l'applicazione definita da A è rappresentata da una matrice diagonale.*

4.4 Esempio

Siano e_1, e_2 la base canonica di $\mathbb{R}^2$ e
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$
la matrice che definisce la rotazione antioraria di $\frac{\pi}{2}$ in $\mathbb{R}^2$.

Una decomposizione ai valori singolari di A è
$$U = (e_2, -e_1) \quad , \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad V = (e_1, e_2)$$
ovvero: scelte e_1, e_2 come base del dominio $\mathbb{R}^2$ e $e_2, -e_1$ come base del codominio $\mathbb{R}^2$, *nel mondo delle coordinate l'applicazione definita da A è rappresentata dalla matrice identica.*

Si osservi che la matrice A è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ (Esercizio: verificare che A è normale e determinare una matrice unitaria che diagonalizza A) ma *non* su $\mathbb{R}$ (infatti gli autovalori di A sono immaginari) quindi non esiste una base di $\mathbb{R}^2$ da utilizzare *sia nel dominio che nel codominio* tale che nel mondo delle coordinate l'applicazione definita da A sia rappresentata da una matrice diagonale. Nell'interpretazione geometrica della decomposizione ai valori singolari *si utilizzano basi diverse nel dominio e nel codominio.*

4.5 Teorema (esistenza della decomposizione)

Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times k}$. Si ha:

(1) *esistono* U, Σ, V decomposizione ai valori singolari di A;

(2) il fattore Σ è *univocamente determinato*, U e V no;

(3) se la matrice A è ad *elementi reali* allora è possibile scegliere U e V ad elementi reali.

(Dimostrazione: no, ma deducibile dalle considerazioni seguenti.)

L'osservazione seguente suggerisce una procedura per determinare una decomposizione ai valori singolari di $A \in \mathbb{C}^{n\times k}$.

4.6 Osservazione

Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times k}$ e U, Σ, V una decomposizione ai valori singolari di A. Allora, poiché $A = U\Sigma V^{\mathsf{H}}$ si ha:

- $A^{\mathsf{H}}A = V(\Sigma^{\mathsf{H}}\Sigma)V^{\mathsf{H}}$
- $AV = U\Sigma$

Dalla prima relazione, constatato che $\Sigma^{\mathsf{H}}\Sigma \in \mathbb{C}^{k\times k}$ è diagonale ad elementi reali non negativi e ricordando che $A^{\mathsf{H}}A$ è hermitiana e che V è unitaria, si deduce che:

- $V(\Sigma^{\mathsf{H}}\Sigma)V^{\mathsf{H}}$ è una diagonalizzazione di $A^{\mathsf{H}}A$ tramite una matrice unitaria.

Dalla seconda, letta per colonne e posto $p = \min(n,k)$, si deduce che:

- $Av_1 = \sigma_1 u_1, \dots, Av_p = \sigma_p u_p$

Una procedura che consente di determinare *una* decomposizione ai valori singolari di $A \in \mathbb{C}^{n\times k}$ è quindi la seguente.

$(U, \Sigma, V) = \mathrm{SVD}(A)$

- determinare $V = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{C}^{k\times k}$ unitaria, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tali che:
$$A^{\mathsf{H}}A = V\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)V^{\mathsf{H}} \quad \text{e} \quad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k \geqslant 0$$
- posto $p = \min(n,k)$, definire: $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \dots, \sigma_p = \sqrt{\lambda_p}$
- per tutti i k tali che $\sigma_k \neq 0$ definire: $u_k = \frac{1}{\sigma_k}Av_k$
- completare fino ad ottenere $u_1, \dots, u_n$ base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ e definire: $U = (u_1, \dots, u_n)$

4.7 Esempio

(I) Sia
$$A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 2}$$
Utilizzando la procedura SVD si ha:

- Per determinare il fattore $V \in \mathbb{C}^{2\times 2}$:
$$A^{\mathsf{H}}A = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$
Il polinomio caratteristico è $(2-x)(-x)$ e quindi $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$. Per completare la diagonalizzazione occorre determinare vettori ortonormali che generano i relativi autospazi. Si ha
$$\mathrm{Ker}\,(A^{\mathsf{H}}A - 2I) = \langle \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$
e
$$\mathrm{Ker}\,(A^{\mathsf{H}}A) = \langle \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$
Dunque:
$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
Si osservi che *non esiste V ad elementi reali che diagonalizza* $A^{\mathsf{H}}A$.
- $p = 2$; $\sigma_1 = \sqrt{2}$ e $\sigma_2 = 0$ dunque:
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Si osservi che λ_1 e λ_2, essendo i primi p autovalori di $A^{\mathsf{H}}A$, sono *univocamente determinati* mentre esistono infinite matrici unitarie che diagonalizzano (e V è *una di esse*).

- Un solo valore singolare di A è non nullo, perciò:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Infine, elementi di $\mathbb{C}^3$ che costituiscono una base ortonormale con u_1 sono, ad esempio:

$$u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  da cui:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(II) Sia

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}$$

Utilizzando la procedura SVD si ha:

- Per determinare il fattore $V \in \mathbb{C}^{3\times 3}$:

$$B^{\mathsf{H}} B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

  Il polinomio caratteristico è $(2-x)^2(-x)$ e quindi $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$. Per completare la diagonalizzazione occorre determinare vettori ortonormali che generano i relativi autospazi. Si ha

$$\mathrm{Ker}\,(B^{\mathsf{H}} B - 2I) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

  e

$$\mathrm{Ker}\,(B^{\mathsf{H}} B) = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

  Dunque:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  Si osservi che V *è ad elementi reali* (perché lo è B); inoltre una diversa scelta di V è:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- $p = 2$; $\sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{2}$ dunque:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

- Tutti i valori singolari di B sono non nulli, perciò:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} B v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} B v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4.8 Esempio

Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

Si ricordi che A non è diagonalizzabile. Utilizzando la procedura SVD si ha:

- Per determinare il fattore $V \in \mathbb{C}^{2\times 2}$:

$$A^{\mathsf{H}} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è $(1-x)(-x)$ e quindi $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$. Per completare la diagonalizzazione occorre determinare vettori ortonormali che generano i relativi autospazi. Si ha

$$\operatorname{Ker}(A^{\mathsf{H}} A - I) = \langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$$

e

$$\operatorname{Ker}(A^{\mathsf{H}} A) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$$

Dunque:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- $p = 2$; $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 0$ dunque:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Un solo valore singolare di A è non nullo, perciò:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Infine, un elemento di $\mathbb{C}^2$ che costituisce una base ortonormale con u_1 è, ad esempio:

$$u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si è dunque "diagonalizzata" la matrice, *ma utilizzando basi diverse nel dominio e nel codominio.*

4.9 Osservazione (rango, nucleo e immagine)

Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times k}$, $U = (u_1, \ldots, u_n), \Sigma, V = (v_1, \ldots, v_k)$ una decomposizione ai valori singolari di A e $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ i valori singolari non nulli di A.

- $\operatorname{Ker}\Sigma = \langle e_{r+1}, \ldots, e_k\rangle \subset \mathbb{C}^k$ e $\operatorname{Im}\Sigma = \langle e_1, \ldots, e_r\rangle \subset \mathbb{C}^n$;
- $x \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow V^{\mathsf{H}}x = x'$ (coordinate di x rispetto a $v_1, \ldots, v_k$) $\in \operatorname{Ker}\Sigma$, quindi:
    - $\dim\operatorname{Ker} A = \dim\operatorname{Ker}\Sigma = k - r$;
    - $v_{r+1}, \ldots, v_k$ è una base ortonormale di $\operatorname{Ker} A$;
- $y \in \operatorname{Im} A \Leftrightarrow U^{\mathsf{H}}y = y'$ (coordinate di y rispetto a $u_1, \ldots, u_n$) $\in \operatorname{Im}\Sigma$, quindi:
    - $\operatorname{rk} A = \dim\operatorname{Im} A = \dim\operatorname{Im}\Sigma = \operatorname{rk}\Sigma = r$;
    - $u_1, \ldots, u_r$ è una base ortonormale di $\operatorname{Im} A$.

4.10 Esempio

Sia
$$A = (u_1, u_2)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}(v_1, v_2, v_3)^{\mathsf{H}}$$
Allora:

- $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}\Sigma = 1$ e $\dim\operatorname{Ker} A = \dim\operatorname{Ker}\Sigma = 2$
- $\operatorname{Im}\Sigma = \langle\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\rangle$ e $\operatorname{Im} A = \langle u_1\rangle$;
- $\operatorname{Ker}\Sigma = \langle\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\rangle$ e $\operatorname{Ker} A = \langle v_2, v_3\rangle$

4.11 Osservazione (decomposizione ai valori singolari di matrici hermitiane)

Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitiana, $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reali tali che: $|\lambda_1| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|$ e $A = Q\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)Q^{\mathsf{H}}$.

Posto:
$$s_j = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \lambda_j \geqslant 0 \\ -1 & \text{se} \quad \lambda_j < 0 \end{cases}$$
e $W = Q\operatorname{diag}(s_1, \ldots, s_n)$ si ha:

- $A = W\operatorname{diag}(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|)Q^{\mathsf{H}}$
- $W^{\mathsf{H}}W = I$

e quindi W, $\operatorname{diag}(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|)$, Q è una decomposizione ai valori singolari di A e $|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|$ ne sono i valori singolari.

4.12 Esempio

Sia $A = (q_1, q_2, q_3)\operatorname{diag}(-3, 1, -1)(q_1, q_2, q_3)^{\mathsf{H}}$ una matrice hermitiana. Allora una decomposizione ai valori singolari di A è:
$$(-q_1, q_2, -q_3) \quad , \quad \operatorname{diag}(3, 1, 1) \quad , \quad (q_1, q_2, q_3)$$

4.13 Osservazione (valori singolari e invertibilità di una matrice quadrata)

Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ i valori singolari di A e U, Σ, V una decomposizione ai valori singolari di A. In tal caso anche i fattori U, Σ e V sono matrici quadrate di ordine n.

Poiché se $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è unitaria si ha $|\det M| = 1$, allora:

$$|\det A| = |\det U|\,|\det \Sigma\,|\,|\det V^{\mathsf{H}}| = \det \Sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$$

e perciò A è invertibile se e solo se tutti i suoi valori singolari sono positivi.

4.14 Problema

Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertibile e U, Σ, V una decomposizione ai valori singolari di A. Determinare una decomposizione ai valori singolari di A^{-1}.

(*Soluzione: Poiché* $A = U\Sigma V^{\mathsf{H}}$ *allora* $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^{\mathsf{H}}$, *ma* V, Σ^{-1}, U *potrebbe non essere una decomposizione ai valori singolari perché gli elementi sulla diagonale di* Σ^{-1} ...)

4.15 Problema

Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times k}$ e U, Σ, V una decomposizione ai valori singolari di A. Determinare una decomposizione ai valori singolari di A^{H}.

(*Soluzione: Poiché* $A = U\Sigma V^{\mathsf{H}}$ *allora* $A^{\mathsf{H}} = V\Sigma^{\mathsf{H}}U^{\mathsf{H}}$ ...)

4.1 Applicazioni: sistemi di equazioni lineari

In questa sezione utilizziamo la decomposizione ai valori singolari come strumento per lo studio dei sistemi di equazioni lineari.

Decomposizione ortogonale di dominio e codominio

Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times k}$ e $U = (u_1, \dots, u_n)$, Σ, $V = (v_1, \dots, v_k)$ una decomposizione ai valori singolari di A. Come già detto (Osservazione 4.9) si ha:

- $\operatorname{rk} A = r =$ numero di valori singolari non nulli di A;
- $v_{r+1}, \dots, v_k$ è una base ortonormale di $\operatorname{Ker} A \subset \mathbb{C}^k$;
- $u_1, \dots, u_r$ è una base ortonormale di $\operatorname{Im} A \subset \mathbb{C}^n$.

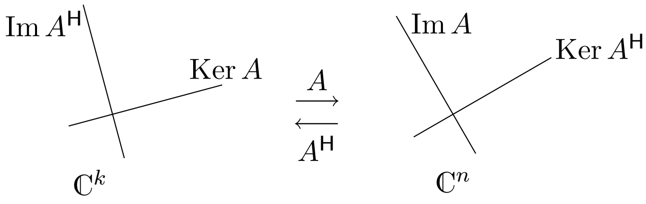
Allora:

- $V, \Sigma^{\mathsf{T}}, U$ è una decomposizione ai valori singolari di A^{H};
- $\operatorname{rk} A^{\mathsf{H}} =$ numero di valori singolari non nulli di $A^{\mathsf{H}} = r$ (i valori singolari di A e quelli di A^{H} coincidono);
- $u_{r+1}, \dots, u_n$ è una base ortonormale di $\operatorname{Ker} A^{\mathsf{H}} \subset \mathbb{C}^n$;
- $v_1, \dots, v_r$ è una base ortonormale di $\operatorname{Im} A^{\mathsf{H}} \subset \mathbb{C}^k$.

Se ne deduce che:

- $\mathbb{C}^k = \langle v_1, \dots, v_r\rangle \overset{\perp}{\oplus} \langle v_{r+1}, \dots, v_k\rangle = \operatorname{Im} A^{\mathsf{H}} \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} A$;
- $\mathbb{C}^n = \langle u_1, \dots, u_r\rangle \overset{\perp}{\oplus} \langle u_{r+1}, \dots, u_n\rangle = \operatorname{Im} A \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} A^{\mathsf{H}}$.

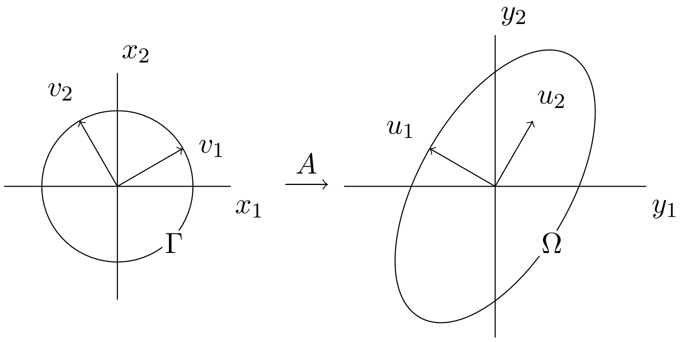
Graficamente le ultime due relazioni si rappresentano:



4.16 Esempio
Sia

$$(u_1, u_2) \quad , \quad \Sigma = \operatorname{diag}(2,1) \quad , \quad (v_1, v_2)$$

una decomposizione ai valori singolari di $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, con v_1, v_2 e u_1, u_2 rappresentati in figura.



Sia Γ la circonferenza di centro l'origine e raggio uno nel dominio e $\Omega = A\Gamma$ l'immagine di Γ.

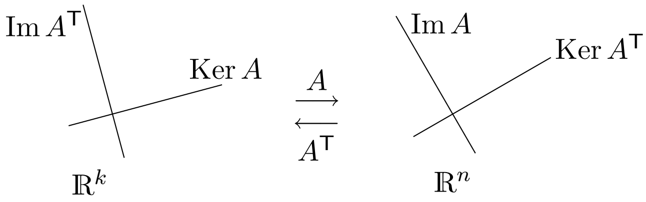
Indicando con x' le coodinate di x rispetto alla base v_1, v_2 e con y' le coodinate di $y = Ax$ rispetto alla base u_1, u_2 si ha $y' = \Sigma\, x'$. Allora:

- L'equazione di Γ in termini di coordinate è: $(x_1')^2 + (x_2')^2 = 1$
- L'equazione di Ω in termini di coordinate si ottiene considerando che il punto di coordinate y' appartiene a Ω se e solo se il punto di coordinate $x' = \Sigma^{-1} y'$ appartiene a Γ e quindi se e solo se:
$$(\tfrac{1}{2} y_1')^2 + (y_2')^2 = 1$$
Quest'ultima è l'equazione di un'ellisse di semiassi due (primo valore singolare di A), uno (secondo valore singolare di A).

4.17 Osservazione (decomposizione ortogonale del dominio e del codominio, caso reale)
Il punto (3) del teorema di esistenza della decomposizione ai valori singolari di $A \in \mathbb{C}^{n\times k}$ (Teorema 4.5) garantisce che se A è ad elementi reali allora esistono $v_1, \dots, v_k$ base ortonormale di $\mathbb{R}^k$ e $u_1, \dots, u_n$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ che "diagonalizzano" l'applicazione definita da A. Ripetendo i ragionamenti fatti nell'osservazione precedente, si deduce che:

$$\mathbb{R}^k = \operatorname{Im} A^{\mathsf{T}} \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} A \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^n = \operatorname{Im} A \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} A^{\mathsf{T}}$$

Anche in questo caso le relazioni si rappresentano graficamente:



4.18 Esempio
Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$\operatorname{Im} A = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

e

$$\operatorname{Ker} A^{\mathsf{T}} = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle = \langle w_1 \rangle$$

Poiché $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im} A \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} A^{\mathsf{T}}$, sono univocamente determinati β_1, β_2 e ν_1 reali tali che:

$$b = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \nu_1 w_1$$

Sfruttando l'ortogonalità dei vettori si ottiene, moltiplicando l'uguaglianza scalarmente per v_1, v_2 e w_1:

$$b \bullet v_1 = \beta_1 v_1 \bullet v_1 \quad , \quad b \bullet v_2 = \beta_2 v_2 \bullet v_2 \quad , \quad b \bullet w_1 = \nu_1 w_1 \bullet w_1$$

da cui:

$$\beta_1 = \tfrac{3}{2} \quad , \quad \beta_2 = 1 \quad , \quad \nu_1 = -\tfrac{1}{2}$$

Struttura dell'insieme delle soluzioni

Siano $A \in \mathbb{C}^{n \times k}$ e $b \in \mathbb{C}^n$. I vettori $x \in \mathbb{C}^k$ tali che $Ax = b$ si chiamano *soluzioni* dell'equazione $Ax - b = 0$. Indichiamo con $\mathscr{S}$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione $Ax - b = 0$ (quando necessario useremo la sigla, più precisa, $\mathscr{S}(A, b)$).

Si vuole descrivere la struttura dell'insieme $\mathscr{S} \subset \mathbb{C}^k$.

(I) Se $b \in \operatorname{Im} A$ allora:

- $\mathscr{S} \neq \varnothing$, ovvero esiste almeno una soluzione dell'equazione;
- Se $x \in \mathscr{S}$ allora $\mathscr{S} = x + \operatorname{Ker} A$ (dunque l'equazione ha una sola soluzione se e solo se $\operatorname{Ker} A = \varnothing$);
  (*Infatti: Se $z \in Ker A$ allora $A(x + z) = Ax + Az = b + 0$ ovvero $x + z \in \mathscr{S}$, dunque $x + Ker A \subset \mathscr{S}$; Se $x' \in \mathscr{S}$ allora $A(x' - x) = Ax' - Ax = b - b = 0$ ovvero $x' - x \in Ker A$ ossia $x' = x + (x' - x) \in x + Ker A$, dunque $\mathscr{S} \subset x + Ker A$.*)

- L'intersezione $\mathscr{S} \cap \mathrm{Im}\, A^{\mathsf{H}}$ contiene un solo elemento, x_*, e quindi

$$\mathscr{S} = x_* + \mathrm{Ker}\, A$$

(*Infatti: Se $y \in \mathscr{S}$, poiché*

$$\mathscr{S} \subset \mathbb{C}^k = Im\, A^{\mathsf{H}} \overset{\perp}{\oplus} Ker\, A$$

esistono $v \in Im\, A^{\mathsf{H}}$ e $w \in Ker\, A$, determinati univocamente, tali che $y = v + w$ e $v \bullet w = 0$; allora: (1) $Av = Av + 0 = Av + Aw = A(v+w) = Ay = b$, ossia $v \in \mathscr{S}$ e quindi $v \in \mathscr{S} \cap Im\, A^{\mathsf{H}}$, e (2) se $v' \in \mathscr{S} \cap Im\, A^{\mathsf{H}}$ allora $v - v' \in Ker\, A \cap Im\, A^{\mathsf{H}}$, ma $Ker\, A$ e $Im\, A^{\mathsf{H}}$ sono in somma diretta e quindi $v = v'$.)

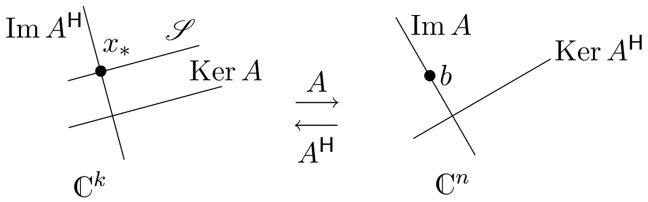
- x_* è l'elemento di $\mathscr{S}$ di norma euclidea minima.

(*Infatti: Se $y \in \mathscr{S}$ esiste $w \in Ker\, A$, determinato univocamente, tale che $y = x_* + w$ e $x_* \bullet w = 0$, da cui:*

$$||y||^2 = ||x_* + w||^2 = ||x_*||^2 + ||w||^2 \geqslant ||x_*||^2$$

e quindi la tesi.)

Se $\mathrm{Ker}\, A \neq \varnothing$, la situazione si rappresenta graficamente come in figura:



(II) Se $b \notin \mathrm{Im}\, A$ allora $\mathscr{S} = \varnothing$

4.19 Esempio

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si verifica che

$$b \in \mathrm{Im}\, A \quad \text{e} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{S}$$

perciò

- $\mathscr{S} = x + \mathrm{Ker}\, A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle = \{ \begin{bmatrix} 1+\lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \}$
- $y \in \mathscr{S} \Rightarrow ||y||^2 = (1+\lambda)^2 + 2\lambda^2$ e la funzione

$$F(\lambda) = (1+\lambda)^2 + 2\lambda^2$$

assume valore minimo per $\lambda = -\frac{1}{3}$; l'elemento di $\mathscr{S}$ di norma minima è quindi

$$x_* = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

- <u>Esercizio</u>: Determinare $\mathscr{S} \cap \mathrm{Im}\, A^{\mathsf{T}}$ (Suggerimento: $x \in \mathrm{Im}\, A^{\mathsf{T}}$ se e solo se $x \perp \mathrm{Ker}\, A \ldots$)

Soluzioni nel senso dei minimi quadrati

Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times k}$ e $b \in \mathbb{C}^n$, e sia $F : \mathbb{C}^k \to \mathbb{R}$ la funzione

$$F(x) = ||Ax - b||$$

I vettori $x \in \mathbb{C}^k$ che rendono minimo il valore di F, ovvero tali che

$$\text{per ogni } w \in \mathbb{C}^k \text{ si ha: } ||Ax - b|| \leqslant ||Aw - b||$$

si chiamano *soluzioni nel senso dei minimi quadrati* dell'equazione $Ax - b = 0$. Indichiamo con $\mathscr{S}_{MQ}$ l'insieme delle soluzioni nel senso dei minimi quadrati dell'equazione $Ax - b = 0$ (anche in questo caso, ove necessario, utilizzeremo la sigla più precisa $\mathscr{S}_{MQ}(A, b)$).

Il termine "minimi quadrati" si spiega constatando che:

- Poiché per valori non negativi dell'argomento la funzione quadrato è crescente, se x rende minimo il valore di F, lo stesso vettore rende minimo il valore di F^2;
- Per ogni $x \in \mathbb{C}^k$, il valore $F^2(x)$ si ottiene sommando i quadrati dei moduli delle componenti del vettore $Ax - b$.

Si vuole determinare l'insieme $\mathscr{S}_{MQ} \subset \mathbb{C}^k$.

(I) Se $b \in \operatorname{Im} A$ allora $\mathscr{S}_{MQ}(A, b) = \mathscr{S}(A, b)$.

(*Infatti, la funzione F assume valori non negativi, e se $x \in \mathscr{S}(A, b)$ allora $F(x) = 0$ e quindi x rende minimo il valore di F: $x \in \mathscr{S}_{MQ}(A, b)$.*)

(II) Se $b \notin \operatorname{Im} A$ allora:

- $\mathscr{S}(A, b) = \varnothing$;
- Poiché $b \in \mathbb{C}^n$, per la decomposizione ortogonale trovata nella prima parte della Sezione 4.1, esistono $\nu \in \operatorname{Ker} A^{\mathsf{H}}$ e $\beta \in \operatorname{Im} A$, determinati univocamente, tali che $b = \nu + \beta$ (β è la proiezione ortogonale di b su $\operatorname{Im} A$ e ν il complemento ortogonale di b rispetto a $\operatorname{Im} A$);
- $\mathscr{S}_{MQ}(A, b) = \mathscr{S}(A, \beta)$.

  (*Infatti, per ogni $x \in \mathbb{C}^k$ si ha:*

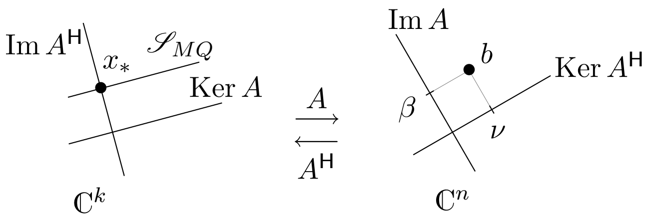
  $$||Ax - b||^2 = ||Ax - \beta - \nu||^2$$

  e quindi, siccome $Ax - \beta$ e ν sono ortogonali [$Ax - \beta \in \operatorname{Im} A$ e $\nu \in \operatorname{Ker} A^{\mathsf{H}}$], si ha:

  $$||Ax - \beta - \nu||^2 = ||Ax - \beta||^2 + ||\nu||^2$$

  Se ne deduce che $||Ax - b||^2$ assume il suo valore minimo $||\nu||^2$ se e solo se $||Ax - \beta||^2 = 0$, ovvero se e solo se $x \in \mathscr{S}(A, \beta)$, ovvero: $x \in \mathscr{S}_{MQ}(A, b)$ se e solo se $x \in \mathscr{S}(A, \beta)$.)
- L'unico elemento, x_*, di $\mathscr{S}_{MQ} \cap \operatorname{Im} A^{\mathsf{H}}$ è l'elemento di $\mathscr{S}_{MQ}$ di norma euclidea minima.

Se $\operatorname{Ker} A \neq \varnothing$, la situazione si rappresenta graficamente come in figura:



Uso della decomposizione ai valori singolari

Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times k}, b \in \mathbb{C}^n$ e $U = (u_1, \dots, u_n), \Sigma, V = (v_1, \dots, v_k)$ una decomposizione ai valori singolari di A (se A e b sono ad elementi reali, U, Σ, V è una decomposizione ad elementi reali).

Si consideri l'equazione $Ax - b = 0$. Indicando con $x' = V^{\mathsf{H}}x$ il vettore delle coordinate di x rispetto alla base $v_1, \dots, v_k$ e con $b' = U^{\mathsf{H}}b$ quello delle coordinate di b rispetto alla base $u_1, \dots, u_n$, si ha:

$$Ax - b = U\Sigma V^{\mathsf{H}}x - b = U(\Sigma V^{\mathsf{H}}x - U^{\mathsf{H}}b) = U(\Sigma\, x' - b')$$

e quindi

$$Ax - b = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \Sigma\, x' - b' = 0$$

Se ne deduce che:

- L'insieme dei vettori delle coordinate degli elementi di $\mathscr{S}(A, b)$ rispetto alla base $v_1, \dots, v_k$ è $\mathscr{S}(\Sigma, b')$;
- Se $b \notin \operatorname{Im} A$, detta β la componente di b su $\operatorname{Im} A$, e β' il vettore delle sue coordinate rispetto alla base $u_1, \dots, u_n$, l'insieme dei vettori delle coordinate degli elementi di $\mathscr{S}_{MQ}(A, b)$ rispetto alla base $v_1, \dots, v_k$ è $\mathscr{S}(\Sigma, \beta') = \mathscr{S}_{MQ}(\Sigma, b')$.

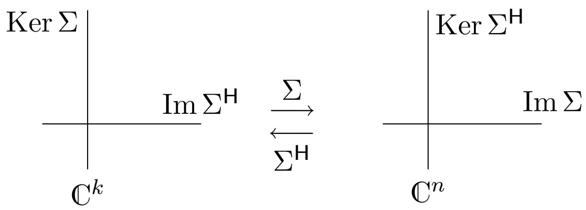
Inoltre, detto r il numero di valori singolari non nulli di A, si ha:

$$\operatorname{Im} \Sigma = \langle e_1, \dots, e_r \rangle \subset \mathbb{C}^n \quad \text{e} \quad \operatorname{Ker} \Sigma = \langle e_{r+1}, \dots, e_k \rangle \subset \mathbb{C}^k$$

e

$$\operatorname{Im} \Sigma^{\mathsf{H}} = \langle e_1, \dots, e_r \rangle \subset \mathbb{C}^k \quad \text{e} \quad \operatorname{Ker} \Sigma^{\mathsf{H}} = \langle e_{r+1}, \dots, e_n \rangle \subset \mathbb{C}^n$$

da cui risultano evidenti le relazioni di ortogonalità analoghe a quelle mostrate nel mondo dei vettori. Nel mondo delle coordinate, il disegno introdotto nella prima parte della Sezione 4.1 diventa dunque:



Si osservi che a differenza del disegno originario, gli assi sono rappresentati paralleli ai lati del foglio. Si utilizza questo espediente grafico per ricordare che mentre nel mondo delle coordinate il nucleo e l'immagine sia di Σ che di Σ^{H} sono *iperpiani coordinati*, ciò non sussiste (in generale) nel mondo dei vettori.

4.20 Osservazione

Sia $b \in \operatorname{Im} A$ allora:

- $\mathscr{S} \neq \varnothing$;
- Il vettore b' delle coordinate di b rispetto alla base $u_1, \dots, u_n$ è:

$$b' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

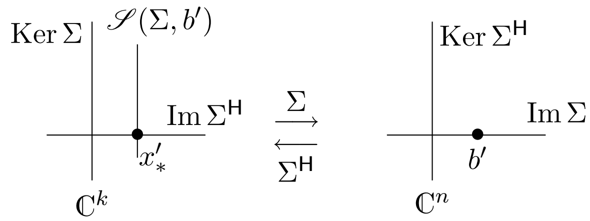
- Siano $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ i valori singolari non nulli di A. Posto

$$x'_* = \begin{bmatrix} b'_1/\sigma_1 \\ \vdots \\ b'_r/\sigma_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^k$$

  si ha: $x'_* \in \mathscr{S}(\Sigma, b')$ e quindi $\mathscr{S}(\Sigma, b') = x'_* + \operatorname{Ker}\Sigma$;

- $x'_* \in \operatorname{Im}\Sigma^{\mathsf{H}}$ e quindi è l'elemento di $\mathscr{S}(\Sigma, b')$ di norma euclidea minima.

Se $\operatorname{Ker}\Sigma \neq \varnothing$, graficamente si ha:



- Detta $\Sigma^+ \in \mathbb{C}^{k\times n}$ la matrice di componenti

$$\sigma^+_{ij} = \begin{cases} 1/\sigma_k & \text{per } i = j = k \in \{1, \ldots, r\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\left[\quad \underline{\text{Esempio}} : \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \Sigma^+ = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \right]$$

  si ha: $x'_* = \Sigma^+ b'$.

- x'_* è l'elemento di $\mathscr{S}(\Sigma, b')$ di norma euclidea minima se e solo se $x_* = Vx'_*$ è l'elemento di $\mathscr{S}(A, b)$ di norma euclidea minima;

  (*Infatti: Sia* $w \in \mathscr{S}(A, b)$ *e* $w' = V^{\mathsf{H}}w \in \mathscr{S}(\Sigma, b')$ *il vettore delle coordinate di* w*; si ha:* $||w||^2 = ||Vw'||^2$ *e, essendo* V *unitaria:* $||Vw'||^2 = ||w'||^2$*; essendo* x'_* *l'elemento di norma euclidea minima di* $\mathscr{S}(\Sigma, b')$ *si ha allora* $||w'||^2 \geqslant ||x'_*||^2 = ||V^{\mathsf{H}}x_*||^2 = ||x_*||^2$.)

- L'elemento di $\mathscr{S}(A, b)$ di norma euclidea minima è:

$$x_* = Vx'_* = V\Sigma^+ b' = V\Sigma^+ U^{\mathsf{H}} b$$

4.21 Osservazione

Sia $b \notin \operatorname{Im} A$ Allora:

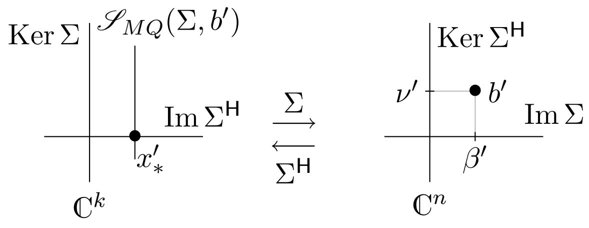
- Il vettore b' delle coordinate di b rispetto alla base $u_1, \ldots, u_n$ è:

$$b' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b'_{r+1} \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix} = \beta' + \nu' \in \mathbb{C}^n$$

  con $\beta' \in \operatorname{Im}\Sigma$ e $\nu' \in \operatorname{Ker}\Sigma^{\mathsf{H}}$;

- Posto $x'_* = \Sigma^+ b'$ si ha: $x'_* = \Sigma^+ \beta'$, dunque x'_* è l'elemento di norma euclidea minima di $\mathscr{S}(\Sigma, \beta') = \mathscr{S}_{MQ}(\Sigma, b')$.

Se $\operatorname{Ker}\Sigma \neq \varnothing$, graficamente si ha:



- x'_* è l'elemento di $\mathscr{S}_{MQ}(\Sigma, b')$ di norma euclidea minima se e solo se $x_* = V x'_*$ è l'elemento di $\mathscr{S}_{MQ}(A, b)$ di norma euclidea minima;

  (*Infatti* ...)

- L'elemento di $\mathscr{S}_{MQ}(A, b)$ di norma euclidea minima è:

$$x_* = V x'_* = V \Sigma^+ b' = V \Sigma^+ U^{\mathsf{H}} b$$

4.22 Osservazione

L'ultimo punto dell'osservazione precedente mostra che l'applicazione che associa a b l'elemento di $\mathscr{S}_{MQ}(A, b)$ di norma euclidea minima è *lineare* e definita dalla matrice $V\Sigma^+ U^{\mathsf{H}}$.

In particolare, quest'ultima matrice, pur essendo definita utilizzando i fattori di *una* decomposizione ai valori singolari di A (decomposizione che non è *mai* unica), risulta *indipendente* dalla decomposizione scelta. In termini matematici, questa osservazione mostra che la definizione seguente è una "buona definizione."

4.23 Definizione

Siano $A \in \mathbb{C}^{n \times k}$ e U, Σ, V una decomposizione ai valori singolari di A. La matrice

$$A^+ = V \Sigma^+ U^{\mathsf{H}} \in \mathbb{C}^{k \times n}$$

si chiama *pseudoinversa* di A.

Utilizzando la matrice pseudoinversa, l'elemento di $\mathscr{S}_{MQ}(A, b)$ di norma euclidea minima è $A^+ b$.

4.24 Problema

Siano $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertibile e U, Σ, V una decomposizione ai valori singolari di A.

- Verificare che $\Sigma^+ = \Sigma^{-1}$.
- Verificare che $A^+ A = I$ e quindi che $A^+ = A^{-1}$.

4.25 Esempio

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Poiché $b \in \operatorname{Im} A$, l'insieme $\mathscr{S}$ delle soluzioni di $Ax - b = 0$ non è vuoto. Inoltre, essendo $\operatorname{rk} A = 2$ si ha $\dim \operatorname{Ker} A = 1$ e quindi $\mathscr{S}$ ha infiniti elementi.

Determinare l'elemento di norma euclidea minima di $\mathscr{S}$.

Soluzione:

- *determiniamo una decomposizione ai valori singolari di A:*

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \;,\; \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \;,\; V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

- *determiniamo la matrice pseudoinversa di A:*

$$A^+ = V\Sigma^+U^{\mathsf{H}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- *calcoliamo l'elemento cercato:*

$$x_* = A^+b = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4.26 Esempio

Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Poiché $b \notin \operatorname{Im} A$, l'insieme $\mathscr{S}$ delle soluzioni di $Ax-b=0$ è vuoto. Inoltre, essendo $\operatorname{rk} A = 1$ si ha $\dim \operatorname{Ker} A = 1$ e quindi $\mathscr{S}_{MQ}$ ha infiniti elementi.

Determinare l'elemento di norma euclidea minima di $\mathscr{S}_{MQ}$.

Soluzione: Procedendo come nell'esempio precedente:

- *decomposizione ai valori singolari di A:*

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- *matrice pseudoinversa di A:*

$$A^+ = V\Sigma^+U^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- *infine:*

$$x_* = A^+b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.27 Osservazione (pseudoinversa, formule particolari)

(I) Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times k}$ a *colonne linearmente indipendenti* e $b \in \mathbb{C}^n$. Allora:

- $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ e quindi $\mathscr{S}_{MQ}(A,b)$ ha un solo elemento: $x = A^+b$;
- Detta β la proiezione ortogonale di b su $\operatorname{Im} A$ si ha $\mathscr{S}_{MQ}(A,b) = \mathscr{S}(A,\beta)$ e quindi x_* è l'unico elemento di $\mathbb{C}^k$ tale che $Ax = \beta$ ovvero tale che $Ax-b$ è ortogonale a $\operatorname{Im} A$ ossia $A^{\mathsf{H}}(Ax-b) = 0$;

- $\operatorname{Ker}(A^{\mathsf{H}}A) = \operatorname{Ker} A = \{0\}$, ovvero la matrice $A^{\mathsf{H}}A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è invertibile, dunque x_* è dato da:
$$x_* = (A^{\mathsf{H}}A)^{-1}A^{\mathsf{H}}b$$

Se ne deduce che:
$$A^+ = (A^{\mathsf{H}}A)^{-1}A^{\mathsf{H}}$$

$$\left[\quad \underline{\text{Esempio}} : A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ , \ A^{\mathsf{T}}A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \right]$$

(II) Siano $A \in \mathbb{C}^{n\times k}$ a *righe linearmente indipendenti* e $b \in \mathbb{C}^n$. Allora:

- Le colonne di A^{H} sono linearmente indipendenti dunque $\operatorname{Ker} A^{\mathsf{H}} = \{0\}$ e quindi (1) $\operatorname{Ker}(AA^{\mathsf{H}}) = \operatorname{Ker} A^{\mathsf{H}} = \{0\}$ e $AA^{\mathsf{H}} \in \mathbb{C}^{k\times k}$ è invertibile, (2) $\dim \operatorname{Im} A = n$;
- $b \in \operatorname{Im} A$ dunque $\mathscr{S}(A,b)$ non è vuoto e $\operatorname{Im} A^{\mathsf{H}} \cap \mathscr{S}$ ha un solo elemento, x_*;
- $x_* \in \operatorname{Im} A^{\mathsf{H}} \cap \mathscr{S}$ significa: $Ax_* = b$ e $x_* = A^{\mathsf{H}}z$ per un (solo) $z \in \mathbb{C}^k$;
- Se $Ax_* = b$ e $x_* = A^{\mathsf{H}}z$ allora $AA^{\mathsf{H}}z = Ax_* = b$ e quindi $z = (AA^{\mathsf{H}})^{-1}b$ e
$$x_* = A^{\mathsf{H}}(AA^{\mathsf{H}})^{-1}b$$

Se ne deduce che:
$$A^+ = A^{\mathsf{H}}(AA^{\mathsf{H}})^{-1}$$

$$\left[\quad \underline{\text{Esempio}} : A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ AA^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \ , \ A^+ = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \right]$$

4.28 Problema

(1) Siano:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Determinare $\mathscr{S}(A,b)$, $\mathscr{S}_{MQ}(A,b)$, $\mathscr{S}(A,c)$ e $\mathscr{S}_{MQ}(A,c)$.

(2) Siano:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinare $\mathscr{S}(A,b)$ e $\operatorname{Im} A^{\mathsf{T}} \cap \mathscr{S}(A,b)$.

4.2 Esercizi

In questa Sezione, i valori singolari di una matrice in $\mathbb{C}^{n\times k}$ si indicano con $\sigma_1, \dots, \sigma_p$, $p = \min\{n, k\}$.

(1) Per ciascuna delle seguenti matrici determinare una decomposizione ai valori singolari. Nella soluzione si riportano solo i valori singolari: per le matrici U e V che completano la decomposizione, si raccomanda di *verificare la risposta*.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\sigma_1 = \sqrt{2}, \sigma_2 = 0$]

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\sigma_1 = 2\sqrt{2}, \sigma_2 = 1$]

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 0$]

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 0$]

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 1$]

(f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\sigma_1 = \sqrt{2}, \sigma_2 = 0$]

(g) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ [Soluzione: $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2$]

(2) Sia:

$$U = (u_1, u_2, u_3, u_4) \quad , \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad V = (v_1, v_2)$$

una decoposizione ai valori singolari di $A \in \mathbb{C}^{4\times 2}$.

(a) Indicare $\operatorname{rk}(A)$, una base ortonormale di $\operatorname{Ker} A^{\mathsf{H}}$ ed una di $\operatorname{Im} A$.

(b) Determinare $A(v_1 + 4v_2)$.

(c) Determinare *tutte* le soluzioni dell'equazione $Ax = u_1 + u_2$.

(d) Indicare una decomposizione ai valori singolari di A^{H}.

(3) Per ciascuno dei seguenti asserti, decidere se sia vero o falso:

(a) Se i valori singolari di $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ sono $\sigma_1 = 17, \sigma_2 = 2$ e $\sigma_3 = \frac{1}{2}$, allora A è invertibile.

(b) Una matrice e la sua pseudoinversa hanno lo stesso rango.

(c) Se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\det A = -2i$, allora tutti i valori singolari di A sono positivi.

(d) Se tutti i valori singolari di $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sono positivi, allora $\det A \in \mathbb{R}$.

(e) Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitiana. Se σ è valore singolare di A, allora σ è autovalore di A.

(4) Sia A la matrice del punto (d) dell'Esercizio 1. Posto:

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad f = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) Determinare A^+.

(b) Determinare *tutte* le soluzioni dell'equazione $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.

(c) Determinare *tutte* le soluzioni dell'equazione $Ax = f$.

(5) Siano $T = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ ortogonale, $W = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ ortogonale,

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

e $M = TSW^{\mathsf{H}} \in \mathbb{C}^{3\times 4}$.

(a) Spiegare perché T, S, W *non è* una decomposizione ai valori singolari di M.

(b) Determinare matrici di permutazione $P_1 \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ e $P_2 \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tali che

$$\text{per ogni } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}^3 \text{ si ha } (c_1, c_2, c_3)P_1 = (c_3, c_2, c_1)$$

e

$$\text{per ogni } c_1, \ldots, c_4 \in \mathbb{C}^4 \text{ si ha } (c_1, c_2, c_3, c_4)P_2 = (c_3, c_2, c_1, c_4)$$

(c) Verificare (utilizzando la definizione) che

$$U = TP_1 \quad , \quad \Sigma = P_1^{\mathsf{T}} S P_2 \quad , \quad V = WP_2$$

è una decomposizione ai valori singolari di M.

(6) Determinare una decomposizione ai valori singolari e la pseudoinversa delle matrici:

$$M = \begin{bmatrix} -2 & \\ & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$R = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{C}^{1\times 4}$$

(7) Siano:

$$A = (1, 1, 1, 2) \quad , \quad b = 2$$

Determinare la pseudoinversa di A e la soluzione dell'equazione $Ax = b$ di norma minima.

(8) Siano:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinare la pseudoinversa di A e la soluzione dell'equazione $Ax = b$ nel senso dei minimi quadrati.