Oss :

- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$
- FCJ(A), $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ che realizza la similitudine:

$$A = C \; FCJ(A) \; C^{-1}$$

- Es: $M = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ invert

  Gram-Schmidt applicato a m_1, m_2, m_3 ...

$$(m_1, m_2, m_3) = (w_1, w_2, w_3) \begin{pmatrix} 1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ 0 & 1 & \tau_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  e poi ... $(m_1, m_2, m_3) = \underbrace{(u_1, u_2, u_3)}_{\text{unitaria}} \underbrace{\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}}_{\text{tr sup}}$

> def: $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$
>
> $\exists\, U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria, $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tr sup t.c. $M = UT$
>
> U, T si dice FATTORIZZAZIONE QR di M

- U, T fatt QR di C (C invert $\Rightarrow$ T invert)
- $A = U \underbrace{T \; FCJ(A) \; T^{-1}}_{\Theta \in \mathbb{C}^{n\times n}} U^H = U \Theta U^H$
- Θ è tr sup (T, $FCJ(A)$, T^{-1} sono tr sup ...)
- $U^H = U^{-1}$ dunque A, Θ sono simili

> TEO: Ogni matrice di $\mathbb{C}^{n\times n}$ è simile ad una matrice triangolare, ed esiste una matrice unitaria che realizza la similitudine.

- Se A herm ($A = A^H$) allora:

$$U \Theta U^H = U \Theta^H U^H$$

  ovvero: $U(\Theta - \Theta^H) U^H = 0 \Rightarrow \Theta = \Theta^H$

  Θ è hermitiana

- Θ hermitiana e tr sup $\Rightarrow$ diagonale e ad elem reali

> TEO: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se A è hermitiana allora
>
> - $\exists\, U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria e Θ diagonale ad elem reali t.c. $A = U \Theta U^H$;
>
> ovvero:
>
> - gli autovalori di A sono tutti reali, e' diagonalizzabile ed esiste una matrice unitaria che realizza la similitudine;
>
> ovvero:
>
> - gli autovalori di A sono tutti reali ed esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ costituita da autovalori di A.

- Analogamente si mostra che

> TEO: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se A è simmetrica allora
>
> - è diagonalizzabile ed esiste una matrice ortogonale che realizza la similitudine
>
> ovvero
>
> - esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A.

* DECOMPOSIZIONE ai VALORI SINGOLARI *

$A \in \mathbb{C}^{n \times k}$

<u>def</u>: una <u>decomposizione ai valori singolari</u> di A è una terna di matrici U, Σ, V t.c.

- $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $V \in \mathbb{C}^{k \times k}$ unitarie
- $\Sigma \in \mathbb{C}^{n \times k}$ diagonale ($\sigma_{ij} = 0$ se $i \neq j$), ad elem reali e, posto $p = \min(n,k)$:

$$\sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \dots \geq \sigma_{pp} \geq 0$$

- $A = U \Sigma V^H$.
- $\sigma_1 = \sigma_{11}, \dots, \sigma_p = \sigma_{pp}$ <u>VALORI SINGOLARI</u> di A

<u>Es</u>: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 2}$

- $U = I$, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

è dvs di A; $\sqrt{2}, 0$ sono i v.s. di A.

<u>Oss</u> $A \in \mathbb{C}^{n \times k}$,

$U = (u_1, \dots, u_n)$, Σ, $V = (v_1, \dots, v_k)$ d.v.s. di A

- $u_1, \dots, u_n$ è base on di $\mathbb{C}^n$
- $v_1, \dots, v_k$ è base on di $\mathbb{C}^k$

$$\begin{tikzcd} x \in \mathbb{C}^k \arrow[r, "A"] & \mathbb{C}^n \ni y = Ax \\ x' \in \mathbb{C}^k \arrow[u, "V"] \arrow[r, "\Sigma"'] & \mathbb{C}^n \ni y' \arrow[u, "U"'] \end{tikzcd}$$

$x = Vx'$ (x': coord di x risp base $v_1, \dots, v_k$)

$y = AVx'$

$y' = U^H y$ (y': coord di y risp base $u_1, \dots, u_n$)

$y' = U^H (U \Sigma V^H) V x' = \Sigma x'$

> Nel mondo delle coordinate, l'applicaz def da A è rappres da una matr diagonale.

<u>Es</u>: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

- $U = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

  è d.v.s. di A
- rispetto alle basi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nel dominio, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nel codominio, l'appl def da A è rappres dalla matr identica (diagonale)
- $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ <u>non</u> è diagonalizzabile ($\nexists$ base da utilizz sia nel dominio che nel codominio, rispetto alle quali l'appl sia rappres da una matrice diagonale).

TEO (esistenza)

$A \in \mathbb{C}^{m \times k}$

1) $\exists\ U, \Sigma, V$ decompos ai v.s. di A

2) Σ è univocam determ, U e V no.

3) se A è ad elem reali, è possibile scegliere U e V ad elem reali.

OSS: $A \in \mathbb{C}^{m\times k}$; U, Σ, V d.v.s. di A

- $\Rightarrow$ $A^H A = (U \Sigma V^H)^H (U\Sigma V^H) =$

$$= V \Sigma^H U^H U \Sigma V^H = V (\underbrace{\Sigma^H \Sigma}_{\substack{\text{è } \in \mathbb{C}^{k\times k},\\ \text{diagonale}\\ \text{ad elem}\\ \text{reali } \geq 0}}) V^H$$

$A^H A$ è hermitiana

$\Rightarrow V(\Sigma^H\Sigma)V^H$ è diagonalizz di A^HA tramite matr unitaria

- $\Rightarrow$ $AV = U\Sigma$

ovvero

$A v_1 = \sigma_1 u_1$

$\vdots$

$A v_p = \sigma_p u_p$

PROCEDURA per det d.v.s. di A

$(U, \Sigma, V) = \mathrm{SVD}(A)$

- determ $V = (v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{C}^{k\times k}$ unitaria $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ t.c.

  $A^H A = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) V^H$

  e $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 0$

- posto $p = \min(m, k)$, def $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \dots, \sigma_p = \sqrt{\lambda_p}$

- per tutti i k t.c. $\sigma_k \neq 0$, $u_k = \frac{1}{\sigma_k} A v_k$ e $\Sigma = \dots$

- completare fino ad ottenere $u_1, \dots, u_m$ base on di $\mathbb{C}^m$ e def $U = (u_1, \dots, u_m)$

Es: (I) $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 2}$

- $A^H A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

  a) $p(x) = (2-x)(-x)$; $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$

  b) $\ker(A^H A - 2I) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

  c) $\ker A^H A = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

  $\Rightarrow \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $p = 2$; $\sigma_1 = \sqrt{2}$, $\sigma_2 = 0$; $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  e $U = I$.