* FORMA CANONICA di JORDAN *

- $\forall \lambda \in \mathbb{C}$: $J_1(\lambda) = \lambda \in \mathbb{C}^{1\times 1}$, $J_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$,

  $J_3(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, ...

- <u>def</u> (matr diag a blocchi)
  - $n_1, \dots, n_k$ interi pos con $n_1 + \dots + n_k = n$ $(k \geq 2)$
  - $A_j \in \mathbb{C}^{n_j \times n_j}$, $j = 1, \dots, k$

  $$\mathrm{diag}(A_1, \dots, A_k) = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

  MATRICE DIAGONALE a BLOCCHI (con blocchi $A_1, \dots, A_k$ sulla diag)

- <u>Es</u>:

  $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ è $\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, 1\right)$

  $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ \hline & & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{array}\right] \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ è $\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$

  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ <u>non è</u> diagonale a blocchi

  $\mathrm{diag}(J_2(1), J_1(-3)) = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ \hline & & -3 \end{array}\right] \in \mathbb{C}^{3\times 3}$

- <u>def</u> (matr in f. di Jordan)

  $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è in f. di J. se $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, $\delta_1, \dots, \delta_k$ interi pos t.c. $M = \mathrm{diag}(J_{\delta_1}(\lambda_1), \dots, J_{\delta_k}(\lambda_k))$ $[\delta_1 + \dots + \delta_k = n]$

  $J_{\delta_i}(\lambda_i)$: blocco di J associato a λ_i di dim δ_i

- <u>Es</u>:

  $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & i & 1 \\ & & i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ sono in f di J

  $\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ sono diag a blocchi ma <u>non</u> in f di J.

- <u>Es</u>: $\forall\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, $\mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ <u>è</u> in f di J.

- <u>def</u> (f canonica di J)

  $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se $\exists$ una matr in f di J <u>simile</u> ad A:
  1) A è <u>riducibile</u> (per sim) <u>a f di J</u>
  2) la matr in f di J simile ad A si chiama <u>forma canonica di Jordan</u> di A e si indica con FCJ(A)

- <u>Pb</u>: data $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, decidere se sia riducibile a f di J e, event, determ FCJ(A) e matr che realizza la similitudine

- <u>TEO</u> (riducibilità a f. di J)
  1) Ogni matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è riducibile a f di J
  2) Tutte le matr in f di J simili ad A hanno sulla diag gli stessi blocchi (al più in ordine diverso)

  (<u>dim</u>: no)

- In generale: Sia $M = \mathrm{diag}\left(J_{\delta_1}(\lambda_1), \dots, J_{\delta_k}(\lambda_k)\right) \in \mathbb{C}^{n \times n}$;

$\forall \lambda$ autovalore, $N_j(\lambda)$ = numero di blocchi assoc a λ di dim $\geq j$;

Es: $M = \mathrm{diag}\left(J_3(2), J_2(2), J_2(i), J_1(i)\right) \in \mathbb{C}^{8\times 8}$

$N_1(2) = 2$, $N_2(2) = 2$, $N_3(2) = 1$, $N_4(2) = 0$

$N_1(i) = 2$, $N_2(i) = 1$, $N_3(i) = 0$

Allora:

1) molt alg dell'autovalore λ = $\sum$ dimens blocchi associati a λ

2) $\dim \ker (M - \lambda I)^j = N_1(\lambda) + \dots + N_j(\lambda)$

- Es: $M \in \mathbb{C}^{7\times 7}$ in f di J t.c.

1) $p_M(x) = (2-x)^3 (i-x)^4$

2) $\dim \ker (M-2I) = 1$, $\dim \ker (M - iI) = 2$

3) $\dim \ker (M-2I)^2 = 2$, $\dim \ker (M-2I)^3 = 3$

4) $\dim \ker (M - iI)^2 = 4$

È poss determ M ?

1) $\Rightarrow$ $\exists$ blocchi associati a 2 e blocchi associati a i

e $\sum$ dim blocchi assoc a $2 = 3$

$\sum$ " " " a $i = 4$

2) $\Rightarrow$ $N_1(2) = 1$, e q. di blocchi assoc a 2: $J_3(2)$;

$N_1(i) = 2$, e q. di blocchi assoc a i:

$J_1(i), J_3(i)$ oppure $J_2(i), J_2(i)$

PROPRIETÀ di matr in f di J

- Una matr in f di J è individuata dall'elenco dei blocchi sulla diagonale;

l'elenco, a meno dell'ordine, è determinabile da proprietà della matrice invarianti per sim.

- Es: $M = \mathrm{diag}\left(J_3(2), J_2(2), J_1(1)\right) \in \mathbb{C}^{6\times 6}$

1) $p_M(x) = (2-x)^5 (1-x)$

ciascun blocco sulla diagonale è associato ad un autovalore e la molt alg di ciascun autov è pari alla somma delle dimens dei blocchi ad esso associati

2) $M - 2I = \dots$, $M - I = \dots$

$\Rightarrow \dim \ker (M-2I) = 2$, $\dim \ker (M-I) = 1$

$\forall \lambda$ autovalore di M, $\dim \ker (M - \lambda I)$ = numero di blocchi associati a λ.

3) $(M-2I)^2 = \dots \Rightarrow \dim \ker (M-2I)^2 = 4$

$\forall \lambda$ autovalore di M, $\dim \ker (M-\lambda I)^2$ = numero di blocchi associati a λ di dimens almeno 1 + numero di blocchi associati a λ di dimens almeno 2.

3) $\Rightarrow$ $N_2(2)+N_1(2)=2$ e q.di $N_2(2)=1$ (già noto)

$N_3(2)+N_2(2)+N_1(2)=3$ e q.di $N_3(2)=1$ (già noto)

4) $\Rightarrow$ $N_2(i)+N_1(i)=4$ e q.di $N_2(i)=2$

dunque i blocchi assoc a i sono $J_2(i)$, $J_2(i)$

Conclusione: i blocchi sulla diag di M sono

$J_3(2)$, $J_2(i)$, $J_2(i)$

MA le info non consentono di dedurre l'ordine dei blocchi sulla diag (le info non dipendono da tale ordine)

- In generale: info sufficienti per determ univoc i blocchi sulla diag di una matr M in f di J:
  1) polinomio caratt
  2) $\forall$ autovalore λ e ogni j intero positivo non sup alla molt alg di λ: $\dim \ker (M-\lambda I)^j$
- Oss: (1) le info sono indip dall'ordine dei blocchi...

  (2) le quantità richieste nelle info sono invarianti per similitudine.

DETERMINAZIONE di FCJ(A)

- Es: $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ t.c.

  (1) $p_A(x)=(1-x)^3(i-x)^2$

  (2) $\dim \ker(A-I)=2$, $\dim \ker(A-iI)=2$

  | le info su A sono inv per sim $\Rightarrow$ sono info su FCJ(A) — che $\exists$ per il Teo...

(1) $\Rightarrow$ $\exists$ blocchi assoc a 1 e blocchi assoc a i

e $\sum$ dim blocchi assoc a 1 $=3$

$\sum$ dim blocchi assoc a $i=2$

(2) $\Rightarrow$ $N_1(1)=2$ e q.di blocchi assoc a 1: $J_1(1)$, $J_2(1)$

$N_1(i)=2$ " " " " a i: $J_1(i)$, $J_1(i)$

Conclusione: $FCJ(A)=\mathrm{diag}(J_1(1), J_2(1), J_1(i), J_1(i))$

Es: $A\in\mathbb{C}^{5\times 5}$ t.c.

1) $p_A(x)=(1-x)^3(i-x)^2$

2) $\dim\ker(A-I)=3$, $\dim\ker(A-iI)=2$

determ, se possibile, FCJ(A)