Es: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

1) $p_A(x) = x^2+1$, radici: $i, -i$

autovalori: $i, -i$.

2) $d_1 = \dim V_A(i) = \dim \operatorname{Ker}(A - iI) = \dim \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} = 1$

$d_2 = \dim V_A(-i) = \dim \operatorname{Ker}(A+iI) = \dim \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} = 1$

3) $d_1 + d_2 = 2 \Rightarrow A$ diagonalizz

- f. diagonale: $\operatorname{diag}(i, -i)$
- $V_A(i) = \left\langle \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $V_A(-i) = \left\langle \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow S = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ realizza la similitudine.

($\det S = 2i$)

Oss: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ non ha autovalori e quindi non è diagonalizzabile.

- $\exists$ matrici di $\mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalizzabili che, pur avendo elem reali, non sono diagonalizz come elem di $\mathbb{R}^{n\times n}$;
- se una matrice di $\mathbb{R}^{n\times n}$ è diagonalizzabile, lo è anche come elem di $\mathbb{C}^{n\times n}$ con la stessa f. diagonale e la stessa matrice che realizza la similitudine.
- Se una matrice di $\mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalizzabile e ad elem reali ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$, esiste una matr di $\mathbb{R}^{n\times n}$ che diagonalizza la matr iniziale in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Es: $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simile a $\operatorname{diag}(2,-3,3)$ e $S = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ che realizza la similitudine:

- constatare che A è simile a $\operatorname{diag}(3,-3,2)$ — ottenuta da $\operatorname{diag}(2,-3,3)$ permutandone gli elem sulla diag — e che la matrice (s_3, s_2, s_1) realizza la similitudine;
- determ una matrice che realizza la similitudine tra A e $\operatorname{diag}(3,2,-3)$;
- dimostrare che A non è simile a $\operatorname{diag}(4,2,3)$ (suggerimento: confrontare $p_A(x)$ con il polin caratt di $\operatorname{diag}(4,2,3)$)

Es: A, $\operatorname{diag}(2,-3,3)$, S come sopra.

Constatare che $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ reali non nulli, anche la matrice $(\alpha_1 s_1, \alpha_2 s_2, \alpha_3 s_3)$ realizza la similitudine tra A e $\operatorname{diag}(2,-3,3)$.

Es: (1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

- $p_A(x)$ è fatt in $\mathbb{R}[x]$ come prodotto di fattori di primo grado?
- A è diagonalizzabile?

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ è diagonalizzabile?
