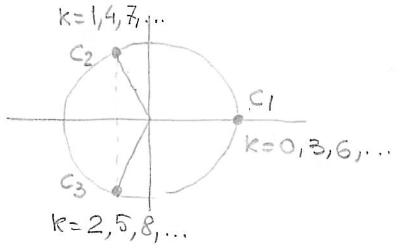
Es: (I) $x^3 - 1 = p(x)$

- $0 \in \mathbb{C}$ non è radice
- $e^c \in \mathbb{C}$ è radice $\Leftrightarrow e^{3c} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{3c} = 1 = e^0$

$\Leftrightarrow 3c = 0 + k2\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow c = k\frac{2\pi}{3} i$, $k \in \mathbb{Z}$



- le radici di $p(x)$ sono

$c_1 = e^0 = 1$

$c_2 = e^{\frac{2\pi}{3} i}$

$c_3 = e^{\frac{4\pi}{3} i} = e^{-\frac{2\pi}{3} i} = \overline{c_2}$

- in $\mathbb{C}[X]$ si ha: $p(x) = (x-1)(x - e^{\frac{2\pi}{3} i})(x - e^{-\frac{2\pi}{3} i})$
- in $\mathbb{R}[X]$ si ha: $p(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)$

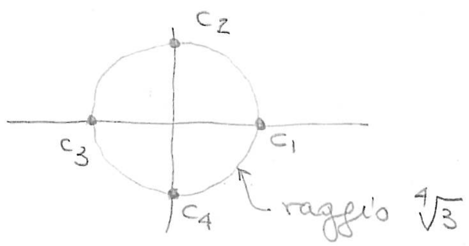
(II) $x^4 - 3 = p(x)$

- $0 \in \mathbb{C}$ non è radice
- $e^c \in \mathbb{C}$ è radice $\Leftrightarrow e^{4c} - 3 = 0 \Leftrightarrow e^{4c} = 3 = e^{\ln 3}$

$\Leftrightarrow 4c = \ln 3 + k2\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow c = \frac{\ln 3}{4} + k\frac{2\pi}{4} i$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow c = \frac{\ln 3}{4} + k\frac{\pi}{2} i$, $k \in \mathbb{Z}$.

- le radici di $p(x)$ sono



$c_1 = e^{\frac{\ln 3}{4}} = \sqrt[4]{3}$

$c_2 = e^{\frac{\ln 3}{4} + \frac{\pi}{2} i} = c_1 e^{\frac{\pi}{2} i}$

$c_3 = e^{\frac{\ln 3}{4} + \pi i} = c_1 e^{\pi i} = -c_1$

$c_4 = e^{\frac{\ln 3}{4} + 3\frac{\pi}{2} i} = c_1 e^{3\frac{\pi}{2} i} = c_1 e^{-\frac{\pi}{2} i} = \overline{c_2}$

- in $\mathbb{C}[X]$ si ha: $p(x) = (x - \sqrt[4]{3})(x - \sqrt[4]{3} e^{\frac{\pi}{2} i})(x + \sqrt[4]{3})$
$(x - \sqrt[4]{3} e^{-\frac{\pi}{2} i})$
- in $\mathbb{R}[X]$ si ha: $p(x) = (x - \sqrt[4]{3})(x + \sqrt[4]{3})(x^2 + \sqrt{3})$

Per casa:
- $p(x) = x^3 + i$ (radici: $c_1 = e^{-\frac{\pi}{6} i}$, $c_2 = c_1 e^{\frac{2\pi}{3} i} = i$, $c_3 = c_1 e^{4\frac{\pi}{3} i}$)
- $p(x) = x^4 + 2x \in \mathbb{R}[X]$ (radici: $c_1 = 0$, $c_2 = \sqrt[3]{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$, $c_3 = -\sqrt[3]{2}$, $c_4 = \overline{c_2}$)

Es: determ il polin caratt di

- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$
- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$
- $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$
- $A = \begin{bmatrix} t_{11} & \times & \times & \times \\ 0 & t_{22} & \times & \times \\ 0 & 0 & t_{33} & \times \\ 0 & 0 & 0 & t_{44} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{4\times 4}$

---

* DIAGONALIZZAZIONE *

def: $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ simili se $\exists\, S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertibile t.c. $A = S^{-1} B S$; in tal caso si dice che S realizza la similitudine tra A e B

def: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalizzabile se simile ad una matrice diagonale, ovvero se $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ e $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertibile t.c.

$S^{-1} A S = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

FORMA DIAGONALE di A

<u>Oss</u>: • Vedere esempio 1.1 di cap 1 (su diagonali22 ...)

• $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonali22 $\Leftrightarrow$ $\exists\ \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ e $S=(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{K}^{n\times n}$ invert (ovvero $s_1,\dots,s_n$ base di $\mathbb{K}^n$) t.c.

$$AS = S\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

ovvero:

$$(As_1,\dots,As_n) = (\lambda_1 s_1,\dots,\lambda_n s_n)$$

ovvero: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonali22 $\Leftrightarrow$ $\exists$ base di $\mathbb{K}^n$ costituita da autovettori di A

PROCEDURA di DIAGONALIZZAZIONE

data $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, la proc consente di <u>decidere</u> se A sia diagonali22 e, in caso affermativo, <u>determina</u> la f diagonale di A e una matr che realizza la sim

1) determ l'elenco senza ripetiz $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ degli autovalori di A;

2) <u>se</u> A non ha autovalori <u>allora</u> A non è diagonali22
<u>altrimenti</u>: per ciascun λ_j determ la dimensione d_j dell'autospazio relativo

3) <u>se</u> $d_1+\dots+d_k = n$ <u>allora</u>

I) A è diagonalizzabile

II) la f diagonale di A è $\mathrm{diag}(\overbrace{\lambda_1,\dots,\lambda_1}^{d_1},\dots,\overbrace{\lambda_k,\dots,\lambda_k}^{d_k})$

III) da ciascun autosp $V(\lambda_j)$ estrarre una base $b_1^{(j)},\dots,b_{d_j}^{(j)}$; una matr che realizza la sim è

$$S = \left(b_1^{(1)},\dots,b_{d_1}^{(1)},\dots,b_1^{(k)},\dots,b_{d_k}^{(k)}\right)$$

<u>altrimenti</u> A non è diagonalizzabile.

<u>Es</u>: • $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

1) $p_A(x) = (1-x)(x^2-1) = (1-x)^2(-1-x)$

$\Rightarrow$ autovalori (senza ripetiz): $1, -1$

2) $d_1 = \dim V(1) = 2$, $d_2 = \dim V(-1) = 1$

3) $d_1 + d_2 = 3 \Rightarrow A$ è diagonali22 e f diag di A:

$$\mathrm{diag}(1,1,-1)$$

Inoltre: $V(1) = \ker(A-I) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$

e $V(-1) = \ker(A+I) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

dunque una matr che realizza la sim è

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(è invertibile!)}$$

• $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

1) $p_A(x) = (x^2+1)(1-x) \Rightarrow$ autovalori di A: 1

2) $d_1 = \dim V(1) = 1$

3) $d_1 \neq 3 \Rightarrow A$ <u>non</u> è diagonalizzabile.

discussione della proc

(A) <u>se</u> $d_1+\dots+d_k = n$ <u>allora</u> è poss costruire S che verifica la rel $AS = S\,\mathrm{diag}(\lambda_1\dots\lambda_1\dots\lambda_k\dots\lambda_k)$.
Inoltre S risulta invertibile (<u>dim</u> omessa).

(B) se $d_1+\dots+d_k \neq n$ allora A non diagonalizz.

Infatti...

Oss: se A è diagonaliz., allora

(I) $\exists\ \lambda_1,\dots,\lambda_k \in \mathbb{K}$, distinti, e $n_1,\dots,n_k$ interi ≥ 1 t.c.

$$p_A(x) = (\lambda_1-x)^{n_1}\cdots(\lambda_k-x)^{n_k}$$

(ovvero $p_A(x)$ si fattorizza in $\mathbb{K}[x]$ come prodotto di fattori di primo grado)

$$\Rightarrow\ n_1+\dots+n_k = n$$

(II) Per $j=1,\dots,k$ si ha

$$d_j = \dim V(\lambda_j) = n_j$$

$$\Rightarrow\ d_1+\dots+d_k = n$$

Es: $\alpha \neq \beta \in \mathbb{K}$, $A = \mathrm{diag}(\alpha,\alpha,\beta)$

- $p_A(x) = \det(A-xI) = \det\begin{pmatrix} \alpha-x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-x & 0 \\ 0 & 0 & \beta-x \end{pmatrix}$

$$= (\alpha-x)^2(\beta-x)$$

- $V(\alpha) = \ker(A-\alpha I) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-\alpha \end{pmatrix}$

e $\dim V(\alpha) = 3 - \mathrm{rk}(A-\alpha I) = 3-1 = 2$

$V(\beta) = \ker(A-\beta I) = \ker\begin{pmatrix} \alpha-\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e $\dim V(\beta) = 3 - \mathrm{rk}(A-\beta I) = 3-2 = 1$

Oss (invarianti per similitudine)

Se $A,B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sono simili, allora:

(1) $p_A(x) = p_B(x)$

(2) λ autovalore $\Rightarrow \dim\ker(A-\lambda I) = \dim\ker(B-\lambda I)$

ovvero: il polinomio caratt e le dim di ciascun autospazio sono invarianti per similitudine.

dalle due oss si ottiene:

$$A \text{ diagonalizz} \Rightarrow d_1+\dots+d_k = n$$