* ESPONENZIALE COMPLESSO *

$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ t.c. f. esp complessa

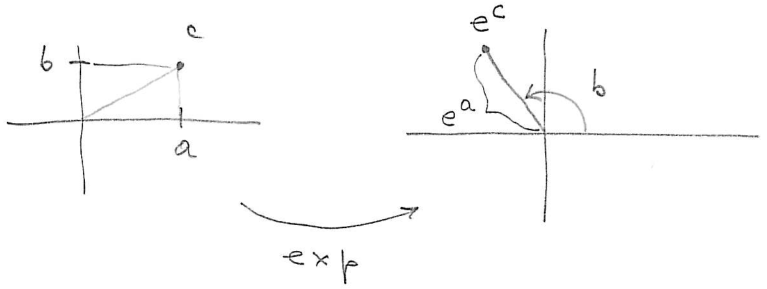
$$c = a + ib \longmapsto \exp(c) = e^{a}(\cos b + i \,\mathrm{sen}\, b)$$

Es: • $b = 0$ < $c \in \mathbb{R}$; $\exp(c) = e^{a}$

• $a = 0$ $(c \in i\mathbb{R}) \Rightarrow \exp(c) = \cos b + i\,\mathrm{sen}\, b$

• $\exp(1+i) = e^{1}(\cos 1 + i\,\mathrm{sen}\, 1) \in \mathbb{C}$

notazione: $e^{c} = \exp(c)$ esp di c



• exp è periodica di periodo $2\pi i$

$(\forall c \in \mathbb{C},\ e^{c+2\pi i} = e^{c})$

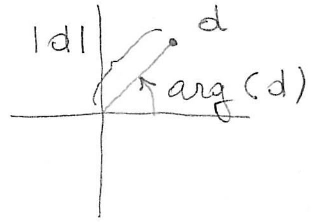
• $d \in \mathbb{C}$

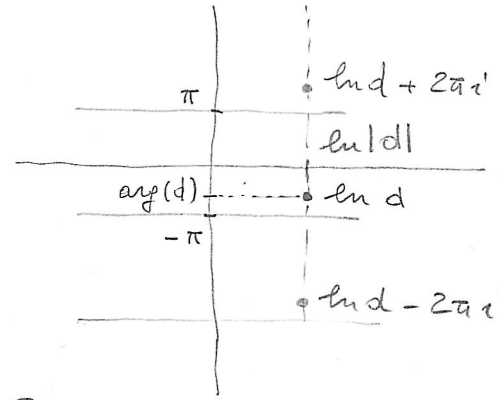
1) $d = 0 \Rightarrow \nexists\, c \in \mathbb{C}$ t.c. $e^{c} = d$

2) $d \neq 0 \Rightarrow e^{\log|d| + i \arg(d)} = d$ (verificare!)

• $\log|d| + i\arg(d)$ < si denota con $\log d$; si chiama LOGARITMO PRINCIPALE di d

• $\forall k \in \mathbb{Z}$, posto $c = \log d + k 2\pi i$ si ha: $e^{c} = d$





• $\ln d$ è l'unico $c \in \mathbb{C}$ t.c.

$$\boxed{e^{c} = d \quad e \quad -\pi < \mathrm{im}(c) \leq \pi}$$

Es: • $\forall c, d \in \mathbb{C}$: $e^{c+d} = e^{c} e^{d}$

• $e^{0} = 1$

• $\forall c \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}$: $(e^{c})^{k} = e^{kc}$

• $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$\theta = \frac{\pi}{2}$; π ; 0 ; $\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{2}$

• $\ln i = \ln|i| + i \arg(i) = 0 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$

• $\ln(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1) = 0 + i\pi = i\pi$

• $\ln(-2)$; $\ln(1+i)$

• $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\overline{(e^{i\theta})} = \overline{(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)} = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$= \cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta) = e^{-i\theta}$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

(FORMULE di EULERO)

* FATTORIZZAZIONI IN $\mathbb{C}[x]$ *

- $p(x) \in \mathbb{C}[x]$; $c \in \mathbb{C}$ RADICE di $p(x)$ se $p(c) = 0$.

1) se $p(x) = 0$ allora $\forall c \in \mathbb{C}$ è radice
2) se $\deg p(x) = 0$ allora $\nexists c \in \mathbb{C}$ t.c. $p(c) = 0$
3) se $\deg p(x) \geq 1$ allora $\exists c \in \mathbb{C}$ t.c. $p(c) = 0$

(TEOREMA di GAUSS : no dim.)

Es: (I) $p(x) = a_1 x + a_0$, $a_1 \neq 0$

1) $\exists c_1 \in \mathbb{C}$ t.c. $p(x) = a_1(x - c_1)$ (Gauss + Ruffini);
2) c_1 è l'unica radice di $p(x)$.

(II) $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_2 \neq 0$

1) $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ t.c. $p(x) = a_2(x - c_1)(x - c_2)$
2) c_1 e c_2 sono le radici di $p(x)$ [event. $c_1 = c_2$ ...]

(n) $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$

1) $\exists$ $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$: $p(x) = a_n(x - c_1) \dots (x - c_n)$
2) $c_1, \dots, c_n$ sono le radici di $p(x)$ [event coincidenti ...]

Es: $p(x) = a_4 x^4 + \dots + a_0$, $a_4 \neq 0$

e $p(x) = a_4 (x - c_1) \dots (x - c_4)$

con $c_1 = c_3 = 1 + i$, $c_2 = 3$, $c_4 = 3 - i$

- le radici di $p(x)$ sono $1+i$, 3, $3-i$
- $p(x) = a_4 (x - (1+i))^2 (x - 3)(x - (3-i))$

- se $p(x) = b(x - \alpha_1)^{h_1} \dots (x - \alpha_r)^{h_r}$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ distinti e $h_1, \dots, h_r$ interi ≥ 1

allora $b = a_4$, $r = 3$, $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \{1+i, 3, 3-i\}$,

e $p(x) = a_4 (x - (1+i))^{h_1} (x - 3)^{h_2} (x - (3-i))^{h_3}$

$\Rightarrow$ $h_1 = 2$, $h_2 = 1$, $h_3 = 1$

- $1+i$ è radice di $p(x)$ di molteplicità 2
  3 " " " " " 1
  $3-i$ " " " " " 1

Es: Indicare tutti gli elem $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ t.c.

- le radici di $p(x)$ sono

$2-3i$	di molteplicità	3
1	" "	2
$3+i$	" "	2

Risp: $p(x) = a\,(x - (2-3i))^3 (x - 1)^2 (x - (3+i))^2$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

---

* FATTORIZZAZIONI IN $\mathbb{R}[x]$ *

- $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$
- $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \in \mathbb{R}$ discriminante di $p(x)$ ...

$\Delta > 0$ $\Rightarrow$ $c_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, $c_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ $\in \mathbb{R}$,

$c_1 \neq c_2$ sono le radici di $p(x)$ e si ha: $p(x) = \alpha (x-c_1)(x-c_2)$

che è fatt di $p(x)$ in $\mathbb{R}[x]$;

__$\Delta = 0$__ $\Rightarrow$ $c = -\frac{\beta}{2\alpha} \in \mathbb{R}$, c è radice di $p(x)$ di molteplicità 2 e $p(x) = \alpha (x-c)^2$ è fatt di $p(x)$ in $\mathbb{R}[x]$.

__$\Delta < 0$__ $\Rightarrow$ $c = \dfrac{-\beta + i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}$, $\overline{c} = \dfrac{-\beta - i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} \notin \mathbb{R}$

e $p(x) = \alpha (x-c)(x-\overline{c})$ è fatt di $p(x)$ in $\mathbb{C}[x]$; __$\nexists$ fatt di $p(x)$ in $\mathbb{R}[x]$ come prodotto di polinomi di 1° grado.__

__Es__: $c \in \mathbb{C}$ (non $\in \mathbb{R}$);

- $\overline{c} \neq c$
- $p(x) = (x-c)(x-\overline{c}) \in \mathbb{R}[x]$
- $\Delta < 0$

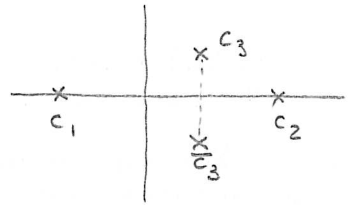
__Oss__: $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg p(x) \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\notin \mathbb{R}$) una radice di $p(x)$ di molt. h

__Allora__: $\overline{\alpha}$ è radice di $p(x)$ di molt h

__Es__: $p(x) = a_4 x^4 + \dots + a_0 \in \mathbb{R}[x]$, $a_4 \neq 0$

le radici di $p(x)$ siano:

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_3, \overline{c}_3 \in \mathbb{C}$



In $\mathbb{C}[x]$ si ha:

$$p(x) = (x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)(x-\overline{c}_3)$$

In $\mathbb{R}[x]$ si ha:

$$p(x) = (x-c_1)(x-c_2)(x^2 - 2\,\mathrm{Re}(c_3)\,x + |c_3|^2)$$

__Es__: • determ fatt in $\mathbb{C}[x]$ e $\mathbb{R}[x]$ di

$p_1(x) = x^2 - 1$, $p_2(x) = x^2 + 1$

$p_3(x) = x^2 + 2$, $p_4(x) = x^3 + 1$

e rappres le radici nel piano di Gauss.