Es
- $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ non ha autovalori

- $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

  $i \in \mathbb{C}$ è autovalore: $A\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

> Es: dimostrare che $1 \in \mathbb{R}$ è autovalore di $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Pb: assegnata $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, decidere se esistono, ed event. determinare, autovalori ed autovettori di A.

Oss: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore di A;

$$V_A(\lambda) = \{ v \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } Av = \lambda v \} \subset \mathbb{K}^n$$

- ogni elem non nullo di $V_A(\lambda)$ è autovettore di A associato a λ;
- $0 \in V_A(\lambda)$ [l'unico elem di $V_A(\lambda)$ che non è autovettore...]
- $V_A(\lambda)$ è ssv di $\mathbb{K}^n$
- $\dim V_A(\lambda) \geq 1$

  $V_A(\lambda)$ si chiama $\boxed{\text{AUTOSPAZIO di } A \text{ assoc a } \lambda.}$

Es: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$; i è autovalore di A.

- $v \in \mathbb{C}^2$ è elem di $V_A(i) \Leftrightarrow Av = iv$

  ovvero $\Leftrightarrow (A - iI)v = 0$ e q. di $\Leftrightarrow v \in \operatorname{Ker}(A - iI)$

- $\dim \operatorname{Ker}(A - iI) = 2 - \operatorname{rk}(A - iI)$

  $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(A - iI) = 1$

- $\operatorname{Ker}(A - iI) = \left\langle \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \Rightarrow V_A(i) = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

> TEO: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore di A;
> - $V_A(\lambda) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$
> - $\dim V_A(\lambda) \geq 1$ (e si dice MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA dell'autovalore λ)

Per ciascuno degli autovalori di A, gli autovettori associati sono tutti gli elementi non nulli dell'autospazio associato.

Oss: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$; $\lambda \in \mathbb{K}$.

λ è autovalore di $A \Leftrightarrow \exists\, v \begin{cases} \in \mathbb{K}^n \\ \neq 0 \end{cases}$ t.c. $Av = \lambda v$

$\Leftrightarrow \exists\, v \begin{cases} \in \mathbb{K}^n \\ \neq 0 \end{cases}$ t.c. $(A - \lambda I)v = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$

> - Se $\det(A - \lambda I) \neq 0$ allora $(A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow v = 0$
> - Se $\det(A - \lambda I) = 0$ allora $\operatorname{rk}(A - \lambda I) < n$
>
> $\Rightarrow \dim S(A - \lambda I, 0) = n - \operatorname{rk}(A - \lambda I) \geq 1$

Es: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$A(x) = \begin{pmatrix} 3-x & 1 \\ 1 & 3-x \end{pmatrix}$ ad elem in $\mathbb{R}[x]$

- $\det A = 8$, $\det A(x) = (3-x)(3-x) - 1$
$$= x^2 - 6x + 8 = p(x)$$

- $A(4) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\det A(4) = 0$

$p(4) = 16 - 24 + 8 = 0$

---

def: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $A - xI$ ha elem in $\mathbb{K}[x]$;

$$p_A(x) = \det(A - xI) \in \mathbb{K}[x]$$

si dice POLINOMIO CARATTERISTICO di A

Es: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

- $\det(A - xI) = \ldots$
- è un elem di $\mathbb{R}[x]$ di grado 3

Es: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$; $\lambda = 4 \in \mathbb{R}$

$\det(A - 4I) = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \lambda$ non è autovalore di A

La condiz $\det(A - \lambda I) = 0$ consente di decidere se λ è autovalore di A senza dover determinare un vettore v che verifica la def.

Oss: - $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$,

$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

se $a_{ij} \in \mathbb{K}[x]$:

- si definisce $\det A(x) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in \mathbb{K}[x]$

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$,

$\det A = a_{11} \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \ldots$ (Laplace secondo 1ª col)

se $a_{ij} \in \mathbb{K}[x]$:

si definisce $\det A(x) = a_{11} \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \ldots \in \mathbb{K}[x]$

- $\forall t \in \mathbb{K}$, posto $\det A(x) = p(x) \in \mathbb{K}[x]$:

$$\det A(t) = p(t)$$

Oss: $p(x) \in \mathbb{K}[x]$; $\alpha \in \mathbb{K}$ t.c. $p(\alpha) = 0$

si dice RADICE di p

> **TEO**: $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se e solo se è radice del polinomio caratt di A.

Es: • $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$p_A(x) = \det(A - xI) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$;

$\nexists\, \alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $p_A(\alpha) = 0 \Rightarrow$ A non ha autovalori

• $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

$p_A(x) = \det(A - xI) = x^2 + 1 \in \mathbb{C}[x]$

$p_A(i) = 0 \Rightarrow i$ è autovalore di A,

$p_A(x) = (x - i)\, q(x)$ con

$q(x) = x + i$

$\Rightarrow p_A(-i) = 0$ e $-i$ è autovalore di A.

Oss: $p_A(x) = (x+i)(x-i) \in \mathbb{C}[x]$

• se $\alpha \in \mathbb{C}$ è radice, allora $\alpha = i$ oppure $\alpha = -i$.

---

* DIAGONALIZZAZIONE *

$A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ si dicono SIMILI se $\exists\, S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertibile t.c.

$$A = SBS^{-1}$$

e si dice che S REALIZZA LA SIMILITUDINE tra A e B.

Oss: Sia $s_1, \dots, s_n$ una base di $\mathbb{K}^n$

• $S = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ è invertibile

• $x, x' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ t.c. $x = Sx'$

ovvero $x' = S^{-1}x$

Allora: data $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, la matrice

$$B = S^{-1}AS$$

è la matr associata all'appl L_A nel mondo delle coordinate:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^n \\ \text{coord} \quad \mathbb{K}^n \arrow[u, "S"] \arrow[r, "B"'] & \mathbb{K}^n \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd}$$

$Ax = y$

$x' = S^{-1}x$

$y' = S^{-1}y$

$ASx' = Sy'$

$\boxed{S^{-1}ASx' = y'}$