* AUTOVALORI, AUTOVETTORI e AUTOSPAZI *

$\mathbb{K}$ campo, V sv su $\mathbb{K}$, $f: V \to V$ $\mathbb{K}$-lin

def (autovalore, autovettore)

- $\lambda \in \mathbb{K}$; se $\exists v \in V$ t.c. $\begin{cases} v \neq 0 \\ f(v) = \lambda v \end{cases}$

  allora λ si dice $\boxed{\text{AUTOVALORE}}$ di f

- $v \in V$; se $v \neq 0$ e $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ t.c. $f(v) = \lambda v$

  allora v si dice $\boxed{\text{AUTOVETTORE}}$ di f

- se $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$ sono t.c. $\begin{cases} v \neq 0 \\ f(v) = \lambda v \end{cases}$

  allora λ è l'unico elem di $\mathbb{K}$ che verifica...
  λ è L' autovalore dell' autovett v
  v è UN autovettore di autovalore λ.

Es: $\iota: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ appl identica

- $1 \in \mathbb{R}$ è autovalore di ι
- $\forall v \in \mathbb{R}^n$ non nullo è autovettore di ι
- $\alpha \in \mathbb{R}$ è autovettore di $\iota \Leftrightarrow \alpha = 1$

Es: $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c. $F\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}$

- F è $\mathbb{R}$-lin
- $F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ 1 è autovalore di F, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovett di F
- $F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -1$ è autovalore di F, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è...
- $3 \in \mathbb{R}$ non è autovalore di F

def (autovalore, autovettore di matrice)

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$;

- $\lambda \in \mathbb{K}$; se λ è autovalore di L_A,

  allora λ si dice $\boxed{\text{AUTOVALORE di } A}$

- $v \in \mathbb{K}^n$; se v è autovettore di L_A

  allora v si dice $\boxed{\text{AUTOVETTORE di } A}$

Oss: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

- $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di $A \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{K}^n$ t.c. $\begin{cases} v \neq 0 \\ Av = \lambda v \end{cases}$
- $v \in \mathbb{K}^n$ è autovettore di $A \Leftrightarrow \begin{cases} v \neq 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ t.c. } Av = \lambda v \end{cases}$

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

- A non ha autovalori. Infatti...

  se $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore allora $\exists v \in \mathbb{R}^2$ non nullo t.c.:

  $$\begin{cases} -v_2 = \lambda v_1 \\ v_1 = \lambda v_2 \end{cases}$$

  ovvero $\exists$ soluz non nulla del sistema omog

  $$\begin{cases} -\lambda v_1 - v_2 = 0 \\ v_1 - \lambda v_2 = 0 \end{cases}, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}$$

  ovvero di $\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  e si avrebbe $\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$,

  assurdo.

- $\Rightarrow A$ non ha autovettori.