AL & FG $\boxed{79}\boxed{80}\boxed{81}$ / 11 maggio 2011 / C41

$A \in \mathbb{K}^{n\times s}$, $L_A : \mathbb{K}^s \to \mathbb{K}^n$ $\mathbb{K}$-lin

def da:

$$L_A(x) = Ax = x_1 a_1 + \dots + x_s a_s$$

- $\ker L_A = \{ x \in \mathbb{K}^s \text{ t.c. } Ax = 0 \} = S(A,0)$
- $\operatorname{Im} L_A = \langle a_1, \dots, a_s \rangle$
- $\dim \operatorname{Im} L_A = rk(A)$
- $\dim \ker L_A = s - rk(A)$

Es: $A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4 & 11 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$

- $rk(A) = 2$;
- $Ax = 0$ equiv $\overbrace{\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}}^{B} x = 0$
- $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $Bx = 0$ equiv $\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} Bx = 0$

ovvero: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -32 & -11 \\ 0 & 1 & 12 & 4 \end{pmatrix} x = 0}$

$\begin{cases} x_1 \quad -32x_3 - 11x_4 = 0 \\ x_2 + 12x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}^4$

sist in f di Gauss ... $\dim S(A,0) = \underset{\#\text{inc}}{4} - \underset{\#\text{inc di Gauss} = rk(A)}{2}$

- L_A suriettiva $\Leftrightarrow rk(A) = n$
- L_A iniettiva $\Leftrightarrow rk(A) = s$
- L_A iniett e suriett $\Leftrightarrow n = s$ e $\det A \neq 0$

$\Rightarrow (L_A)^{-1} = L_{(A^{-1})}$ $\left[(L_A)^{-1} = L_X, \ L_X L_A = \iota \right.$
$\left. \Rightarrow XA = I \Rightarrow X = A^{-1} \right]$

TEO (della dimensione)

V, W sv su $\mathbb{K}$, $f : V \to W$ $\mathbb{K}$-lin,
V di tipo finito. Allora:

1) $\operatorname{Im} f$ è di tipo finito
2) $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$

---

dim: 1) già detto;

2) no: si constata che è vero nel caso $f = L_A$.

Es: V, W sv su $\mathbb{K}$ di t.f, $f : V \to W$ $\mathbb{K}$-lin

- $\dim V = 5$ e $\dim W = 3 \Rightarrow f$ non iniett
  ($\Rightarrow \dim \ker f \geq 2$)
- $\dim V = 5$ e $\dim W = 7 \Rightarrow f$ non suriettiva
  ($\Rightarrow 0 \leq \dim \ker f \leq 5 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f \leq 5$)
- $\dim V = 5$ e f iniett e suriett
  $\Rightarrow W$ è t.f e $\dim W = 5$
  ($\Rightarrow \dim \ker f = 0 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 5$
  e $\operatorname{Im} f = W$)

Es: $A = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 & 0 \\ 2 & i & 1 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 4}$,

$L_A : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$ l'appl.ne $\mathbb{C}$-lin ...

- calcolare dim Ker L_A, e una base di Ker L_A.
- calcolare dim Im L_A e una base di Im L_A
- calcolare $\{ x \in \mathbb{C}^4$ t.c. $L_A(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

Es: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ ...

- calcolare dim Ker L_A e base Ker L_A
- calcolare dim Im L_A e base Im L_A
- calcolare $\{ x \in \mathbb{R}^3$ t.c. $L_A(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$.

TEO (costruzione di appl.ni lineari)

V s.v di tipo finito; $v_1, \dots, v_k$ base V

$w_1, \dots, w_k$ fam di elem di W.

$\exists!$ $f : V \to W$ $\mathbb{K}$-lin t.c.

$f(v_1) = w_1, \dots, f(v_k) = w_k$

dim: $F : V \to W$ def da...

1) dato $v \in V$ si calcolano le coord $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ di v risp alla base $v_1, \dots, v_k$

2) si pone $F(v) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k$

- F è $\mathbb{K}$-lin e $F(v_1) = w_1, \dots, F(v_k) = w_k$
- Se $G : V \to W$ è $\mathbb{K}$-lin e $G(v_1) = w_1, \dots, G(v_k) = w_k$ allora $\forall v \in V$, $G(v) = F(v)$.

Es: Siano

$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

- v_1, v_2, v_3 lin indip $(\det(v_1, v_2, v_3) \neq 0)$
  $\Rightarrow$ sono base di $\mathbb{R}^3$
- TEO $\Rightarrow$ $\exists!$ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-lin t.c.
  $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$, $f(v_3) = w_3$
- $\exists!$ $M \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ t.c. $f = L_M$
- Per determ M:

1) $Mv_1 = w_1$, $Mv_2 = w_2$, $Mv_3 = w_3$

ovvero: $\underbrace{M}_{2\times 3} \underbrace{(v_1, v_2, v_3)}_{3\times 3} = \underbrace{(w_1, w_2, w_3)}_{2\times 3}$

2) $\det(v_1, v_2, v_3) \neq 0 \Rightarrow \exists (v_1, v_2, v_3)^{-1}$

$\Rightarrow M = (w_1, w_2, w_3)(v_1, v_2, v_3)^{-1}$

Es: se esiste, indicare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ $\mathbb{R}$-lin t.c.

$$\ker f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \operatorname{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e determ $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ t.c. $f = L_A$.