Es:
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^4$$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $\mathrm{rk}(A) = 2$, $\mathrm{rk}(A,b) = 2 \Rightarrow$ sist risolubile.
- $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$ ... il minore di A ...
- ... il sistema è equival a: $\begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^4$

(infatti: $\mathrm{III}' \leftarrow \mathrm{III} - \mathrm{I} - \mathrm{II}$)

Es:
$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^4 \qquad (Ax = b)$$

- determ $\mathrm{rk}(A)$ e $\mathrm{rk}(A,b)$
- determ un sist equivalente a quello dato e costituito da 2 eq.ni.

TEO (Cramer): $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ con $\det A \neq 0$;

- $x = A^{-1}b$ è l'unica soluzione di $Ax = b$

(dim: $\mathrm{rk}(A) = n \Rightarrow \mathrm{rk}(A,b) = n$ e $x \in S(A,b) \Rightarrow x = A^{-1}b$)

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

- $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists!\, x$ t.c. $Ax = b$: $x = A^{-1}b$.
- $Ax = b \sim x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = b$

$\sim (x_1 a_1 - b) + x_2 a_2 + x_3 a_3 = 0$

ovvero: $x_1 a_1 - b, a_2, a_3$ è fam lin dip

$\Rightarrow \det(x_1 a_1 - b, a_2, a_3) = 0$

$\Rightarrow x_1 \det(a_1, a_2, a_3) - \det(b, a_2, a_3) = 0$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\det(b, a_2, a_3)}{\det(a_1, a_2, a_3)} = \frac{\det(b, a_2, a_3)}{\det A}$$

- $x_2 = \dfrac{\det(a_1, b, a_3)}{\det A}$, $x_3 = \dots$

Es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

- calcolare $\det A$ e, se esiste, A^{-1}

Es: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

- $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $H_1 A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 10/3 & -1 \end{bmatrix} = A_1$
- $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10/3 & 1 \end{bmatrix}$, $H_2 A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix} = A_2$ è tr sup.

- $A_2 = H_2 A_1 = H_2 H_1 A \ldots$

$\ldots \Rightarrow \quad \underset{-33}{\det A_2} = \underset{1}{\det H_2}\ \underset{1}{\det H_1}\ \det A = \det A$

$\ldots \Rightarrow \quad A_2^{-1} = A^{-1} H_1^{-1} H_2^{-1} \Rightarrow A^{-1} = A_2^{-1} H_2 H_1$

Es: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

- $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_1$

- $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_1 A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A_2$

- etc.

Es: $O_n = \{ M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c. M è ortogonale $\}$

- $I \in O_n$
- $A, B \in O_n$; $\quad (AB)^T AB = B^T \underbrace{A^T A}_{=I} B = B^T B = I$

  $\Rightarrow AB \in O_n$
- $A \in O_n$; $\quad \underbrace{(A^{-1})^T}_{=A} A^{-1} = A A^{-1} = I$

  $\Rightarrow A^{-1} \in O_n$
- $A \in O_n$; $\quad A^T A = I \Rightarrow \underset{\det A}{\det A^T}\ \det A = 1$

  $\Rightarrow (\det A)^2 = 1$, ovvero $\det A \in \{-1, 1\}$.

Es: $U_n = \{ M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ t.c. M è unitaria $\}$

Verificare che:

- $I \in U_n$
- $A, B \in U_n \Rightarrow AB \in U_n$
- $A \in U_n \Rightarrow A^{-1} \in U_n$
- $A \in U_n \Rightarrow |\det A| = 1$.

---

* APPL. LIN: NUCLEO e IMMAGINE *

$\mathbb{K}$ campo, V, W sp vett su $\mathbb{K}$, $f: V \to W$ $\mathbb{K}$-lin

- nucleo di f = Kernel f =

  $= \ker f = \{ v \in V : f(v) = 0 \}$
- immagine di f = $\operatorname{Im} f = \{ w \in W : \exists v \in V$ e $f(v) = w \}$

Oss:
- $\ker f$ è ssv di V
- $\operatorname{Im} f$ è ssv di W

- se $w \in W$ ma $w \notin \operatorname{Im} f$

  allora $\{ v \in V : f(v) = w \} = \emptyset$
- se $w \in \operatorname{Im} f$ e $\tilde{v} \in V$ è t.c. $f(\tilde{v}) = w$

  allora $\{ v \in V : f(v) = w \} = \tilde{v} + \ker f$
- f SURGETTIVA se $\operatorname{Im} f = W$

- f INIETTIVA se $\ker f = \{0\}$.

- se f iniett & suriett (ovvero bigettiva)

  allora $f^{-1}: W \to V$ è $\mathbb{K}$-lin.

(dim: $\forall\, w, z \in W$ si ha

$$f\left(f^{-1}(w+z)\right) = w+z$$

$$f\left(f^{-1}(w)+f^{-1}(z)\right) = f\left(f^{-1}(w)\right) + f\left(f^{-1}(z)\right) = w+z$$

iniettiva $\Rightarrow$ $f^{-1}(w+z) = f^{-1}(w) + f^{-1}(z)$

etc ...)

- Se V sv di tipo finito e $v_1, \dots, v_k$ fam finita di gen, allora $f(v_1), \dots, f(v_k)$ è fam finita di gen di $\operatorname{Im} f$.