Es: $(3,0,1,0),\ (0,0,1,0) \in \mathbb{R}^{1\times 4}$

- lin indip
- $(3,0,1,0),\ (0,0,1,0),\ e_1', \dots, e_4'$

$$\downarrow$$

PROCEDURA...

$$\downarrow$$

$(3,0,1,0),\ (0,0,1,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,0,1)$ è base $\mathbb{R}^{1\times 4}$

- $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\det A \neq 0$
- $\det A = $ (sv lapl 4ª riga, 3ª riga) $= -\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: il minore di tipo 2×2 otten elim...

TEO (di Kronecker, II)

$a_1', \dots, a_m' \in \mathbb{K}^{1\times n}$ lin indip $\iff$ $\begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_m' \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ha un minore di tipo $m\times m$ invertibile

def (rango): $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{m\times n}$.
L'intero $\dim\langle a_1, \dots, a_n\rangle$ si dice RANGO di A e si indica con la sigla: $rk(A)$.

Es:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; $\det A = 0 \Rightarrow rk(A) < 3$,

$$\underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{minore di tipo } 2\times 2 \text{ ottenuto...}} \neq 0 \overset{\text{Teo Kronecker}}{\Rightarrow} rk(A) = 2$$

- $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\det B = 0 \Rightarrow rk(B) < 3$,

$\forall$ minore di B di tipo 2×2 ha $\det = 0 \Rightarrow rk(B) < 2$,

$$\det\underbrace{(1)}_{\text{minore di tipo } 1\times 1 \text{ ottenuto...}} \neq 0 \Rightarrow rk(B) = 1$$

- $C \in \mathbb{K}^{3\times 5}$ t.c. $rk(C) = 2 \Rightarrow \exists$ minore 2×2 di C con $\det \neq 0$ (e) $\forall$ minore 3×3 di C ha $\det = 0 \Rightarrow$ il ssv di $\mathbb{K}^{1\times 5}$ generato dalle righe di C ha dim $= 2$.

TEO: $A = \begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_m' \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$rk(A) = r \iff \exists$ minore di A di tipo $r\times r$ con $\det \neq 0$ (e) $\forall$ minore di tipo $s\times s$ (con $s > r$) ha $\det = 0$

In tal caso: $\dim\langle a_1', \dots, a_m'\rangle = r$

Es: Si cons il sist di eq.ni lin

$$\Sigma: \begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_5 = -1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^5$$

- $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ MATRICE INCOMPLETA del sistema

matr dei coeff del sistema

- $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ COLONNA dei TERMINI NOTI del sistema

- $(A, b) \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ MATRICE COMPLETA del sistema

- $A = (a_1, \dots, a_5) = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix}$; $\mathcal{S}$ si riscrive

  (1) $Ax = b$, $x \in \mathbb{R}^5$

  (2) $x_1 a_1 + \dots + x_5 a_5 = b$, $x \in \mathbb{R}^5$

  (3) $\begin{cases} a_1' x = b_1 \\ a_2' x = b_2 \\ a_3' x = b_3 \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}^5$

- $S = \{ x \in \mathbb{R}^5$ che sono soluzione di $\mathcal{S} \}$

  ($S \neq \emptyset$: sistema RISOLUBILE,
  $S = \emptyset$: " NON RISOLUBILE)

- $Ax = 0$, $x \in \mathbb{R}^5$: sistema OMOGENEO ASSOCIATO a $Ax = b$,

  $H = \{ x \in \mathbb{R}^5$ t.c. $Ax = 0 \}$ è ssv di $\mathbb{R}^5$

- Teo (Rouché - Capelli)

  $Ax = b$ è risolubile $\Leftrightarrow$ $rk(A, b) = rk(A)$
  $(S \neq \emptyset)$