Oss: • SE $\exists\, X \in \mathbb{K}^{n\times n}$ t.c. $AX = I$

allora $A$ è invertibile ($\det A \neq 0$) e $X = A^{-1}$;

• SE $\exists\, Y \in \mathbb{K}^{n\times n}$ t.c. $YA = I$

allora $A$ è invertibile e $Y = A^{-1}$.

---

Es: • $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$; $\det A = 2 \neq 0$ : $A$ è invertibile.

Per determinare $A^{-1}$:

I) Si cons il sistema di eq.ni lineari, $y \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{l} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array}\begin{cases} x_1 = y_1 \\ 2x_1 + x_2 = y_2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = y_3 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^3$$

(ovvero: $Ax = y$) che risulta in f di Gauss,

con una sola soluzione:

$$x = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 - 2y_1 \\ \frac{3}{2}y_1 - y_2 + \frac{1}{2}y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

II) Si ha: $Ax = y \Rightarrow x = A^{-1}y$ e q. di:

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}}$$

• $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertibile:

I) $\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0 \Rightarrow AB$ invertibile

$\Rightarrow \exists!\, x \in \mathbb{K}^{n\times n}$ t.c. $(AB)x = I$

II) Si ha $ABX = I \Rightarrow BX = A^{-1} \Rightarrow \boxed{X = B^{-1}A^{-1}}$

• $I \in \mathbb{K}^{n\times n}$; $I \cdot I = I \Rightarrow I$ è invertibile, $I^{-1} = I$.

• $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertibile;

$A^{-1}A = I \Rightarrow A^{-1}$ è invertibile, $(A^{-1})^{-1} = A$.

• $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertibile;

$A^{-1}A = I \Rightarrow A^T (A^{-1})^T = I$

$\Rightarrow A^T$ invertibile e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

• $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertibile;

$A^{-1}A = I \Rightarrow A^H (A^{-1})^H = I$

$\Rightarrow A^H$ invertibile e $(A^H)^{-1} = (A^{-1})^H$.

---

TEO: $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

① $u_1, \dots, u_n$ è base on di $\mathbb{R}^n$ risp al ps canonico $\Leftrightarrow U^T U = I$ ②

$\Updownarrow$

$U$ è invertibile e $U^{-1} = U^T$ ③

(dim: ...) $U$ t.c. ①, ②, ③ : MATRICE ORTOGONALE.

TEO: $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^{n \times n}$

① $u_1, \dots, u_n$ è base o.n. di $\mathbb{C}^n$ risp al p.h. canonico $\iff$ $U^H U = I$ ②

$\Updownarrow$

$U$ è invertibile e $U^{-1} = U^H$ ③

$U$ t.c. ①,②,③: MATRICE UNITARIA.

---

Es: • $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ di permutazione $\Rightarrow$ ortogonale

• decidere se:

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

è ortogonale.

---

Oss: $a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \ a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ;

• $a_1, a_2$ lin indip

• $a_1, a_2, e_1, e_2, e_3, e_4 \longrightarrow$ PROCEDURA... $\longrightarrow a_1, a_2, e_1, e_3$ base di $\mathbb{R}^4$

• $\det(a_1, a_2, e_1, e_3) \neq 0$

• $\det \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+3} \det \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

• $\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}}_{\in\, \mathbb{R}^{4 \times 2}} \ M$ ELIMINO RIGA 1 e RIGA 3 $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

il MINORE di $M$ di tipo $2 \times 2$ ottenuto eliminando...

• $\boxed{a_1, a_2 \text{ lin indip} \Rightarrow (a_1, a_2) \text{ ha un minore di tipo } 2 \times 2 \text{ invertibile.}}$

---

Es: $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$

• lin indip

• $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$... elimino riga 1... $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ è invertibile

---

Es: $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$

• lin dip

• $\forall$ minore di tipo $3 \times 3$ di $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ha $\det = 0$.

---

**TEO (di Kronecker, I)**

$a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}^n$ lin indip $\iff$ $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^{n \times m}$ ha un minore di tipo $m \times m$ invertibile