def: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$

- A_{ij} = la matrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta eliminando da A la riga i-esima e la colonna j-esima

Es: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$, $A_{23} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $A_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

- $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji} \in \mathbb{K}$ (indici scambiati!)

si dice l'aggiunto di a_{ji}

Es: $a'_{12} = (-1)^{1+2} \det A_{21} = -\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

- $A' \in \mathbb{K}^{n\times n}$ la matrice di componenti gli aggiunti a'_{ij} | MATRICE degli AGGIUNTI di A / MATRICE AGGIUNTA di A

Es: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}$

TEO (di Laplace): $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$; si ha

$$AA' = A'A = (\det A)\, I_n = \begin{pmatrix} \det A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det A \end{pmatrix}$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

sv di Laplace di det A secondo la 1ª riga

$$\det A = (AA')_{11} = \boxed{a_{11}a'_{11} + a_{12}a'_{21} + a_{13}a'_{31}}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\det A_{11} + a_{12}(-1)^{2+1}\det A_{12} + a_{13}(-1)^{3+1}\det A_{13}$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma anche:

sv di Laplace di det A secondo la 2ª colonna

$$\det A = (A'A)_{22} = \boxed{a'_{21}a_{12} + a'_{22}a_{22} + a'_{23}a_{32}}$$

$$= a_{12}(-1)^{1+2}\det A_{12} + a_{22}(-1)^{2+2}\det A_{22} + a_{32}(-1)^{3+2}\det A_{32}$$

$$= 0\cdot(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1)(-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1\,(-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

etc...

Es: Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare

a'_{21}, A', AA', $A'A$,

lo sv di Laplace di $\det A$ < secondo la 2ª riga / secondo la 3ª colonna.

Oss: $A = (a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$

- SE $\det A = 0$ allora

1) $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli t.c. $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0$

$\exists\ \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ " " " " $\beta_1 a_1' + \dots + \beta_n a_n' = 0$

2) posto $M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ \vdots & & \\ \alpha_n & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $N = \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & \beta_n \\ \vdots & & \\ \beta_1 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$

si ha

$\begin{cases} M \neq 0 \\ AM = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} N \neq 0 \\ NA = 0 \end{cases}$

3) $\nexists\ X \in \mathbb{K}^{n \times n}$ t.c. $AX = I$ (non esistono inv destre di A)

[dim: se esistesse: $0 = (NA)X = N(AX) = N$, assurdo]

4) $\nexists\ Y \in \mathbb{K}^{n \times n}$ t.c. $YA = I$ (non esistono inv sinistre di A)

- SE $\det A \neq 0$

1) $\frac{1}{\det A} A'$ è l'unica $X \in \mathbb{K}^{n \times n}$ t.c. $AX = I$

($\exists!$ inversa destra di A)

2) $\frac{1}{\det A} A'$ è l'unica $Y \in \mathbb{K}^{n \times n}$ t.c. $YA = I$

($\exists!$ inversa sinistra di A)

---

def: $\frac{1}{\det A} A'$ si dice l'inversa di A e si indica con A^{-1}

le matrici con $\det A \neq 0$ si dicono matrici invertibili

Es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

- è invertibile?

$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ sì!

- chi è A^{-1}?