Es: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$.

Calcolare $\det A^T$ e constatare che $\det A^T = \det A$.

Oss: $\forall n$ intero ≥ 1, $\forall A \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

$$\det A^T = \det A$$

Es: $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 0$, $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0$; $\det \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ 2a_3' \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix}$

etc.

Es: $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{K}^{3\times 3}$; $B = (a_1 + \lambda a_2, a_2, a_3)$, $\lambda \in \mathbb{K}$

si ha: $\det B = \det A$

METODO di GAUSS per calc det:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$$\Rightarrow \det A \underset{\substack{III \leftarrow III - 4I \\ IV \leftarrow IV - I}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-5) \cdot 1 = -10$$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

$$\Rightarrow \det A \underset{I \rightleftarrows III}{=} -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{III \leftarrow III - II \\ IV \leftarrow IV - II}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{IV \leftarrow IV - 3III}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 3$$

Idea:
- utilizzando (A) scambi di colonne e (B) sostituzioni del tipo $a_j \leftarrow a_j + \lambda a_k$ si riconduce la matrice a triangolare ($\Rightarrow$ det facile da calcolare)
- utilizzando (A') scambi di righe e (B') sostituzioni del tipo $a_j' \leftarrow a_j' + \lambda a_k'$ si riconduce la matrice a triangolare ($\Rightarrow$ det facile da calcolare).

Es: In $\mathbb{R}^{3\times 3}$: $\det \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

In $\mathbb{C}^{2\times 2}$: $\det \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ i & 1+i \end{pmatrix}$

Es: • $A = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, $B = \mathrm{diag}(b_{11}, \dots, b_{nn}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$

$\Rightarrow AB = \mathrm{diag}(a_{11}b_{11}, \dots, a_{nn}b_{nn})$ e

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

• $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$

$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{22}b_{22} & \cdot \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$ (è tr superiore!)

e $\det(AB) = \det A \det B$

• $A = (a_1, a_2)$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$

$\Rightarrow AB = (b_{11}a_1 + b_{21}a_2 \, , \, b_{12}a_1 + b_{22}a_2)$ e

$\det(AB) = \dots = (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \det(a_1, a_2)$

$= \det A \det B$

TEO (di BINET): $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Si ha: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

TEO (indip lin e det, I): Sia $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^n$. Allora:

$a_1, \dots, a_n$ è base di $\mathbb{K}^n$ (sv su $\mathbb{K}$) $\Leftrightarrow \det(a_1, \dots, a_n) \neq 0$

dim: ($\Rightarrow$) Siano $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}^n$ le colonne delle coordinate di $e_1, \dots, e_n$ rispetto alla base $a_1, \dots, a_n$

(ovvero: $(a_1, \dots, a_n)\, b_1 = e_1 \ \dots$).

Posto $B = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ si ha

$$(a_1, \dots, a_n)\, B = (e_1, \dots, e_n) = I_n$$

Teo Binet $\Rightarrow \det(a_1, \dots, a_n) \det B = 1$

$\Rightarrow \det(a_1, \dots, a_n) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Per assurdo: se $a_1, \dots, a_n$ non è base di $\mathbb{K}^n$ allora $a_1, \dots, a_n$ lin dip $\Rightarrow \det(a_1, \dots, a_n) = 0$.

Es: decidere se

• $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$

• $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia una base di $\mathbb{C}^3$

TEO (indip lin e det, II): sia $a_1', \dots, a_n' \in \mathbb{K}^{1\times n}$.

Allora:

$a_1', \dots, a_n'$ è base di $\mathbb{K}^{1\times n}$ (s.v. su $\mathbb{K}$) $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix} \neq 0$

Dai due teoremi segue:

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

le colonne di A sono una base di $\mathbb{K}^n$

$\Updownarrow$

le righe di A sono una base di $\mathbb{K}^{1\times n}$

$\Updownarrow$

$\det A \neq 0$

Es: $A = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$

- calcolare $\det A$, $\det \overline{A}$, $\det A^H$.

Oss: se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ allora:

$$\det \overline{A} = \overline{(\det A)}$$
$$\det A^H = \overline{(\det A)}$$

Es: sia $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ e $\det A = c \in \mathbb{C}$.

Calcolare:

- $\det(a_3, a_1, a_2, a_4)$, $\det \begin{pmatrix} a_1' \\ a_3' \\ a_4' \\ a_2' \end{pmatrix}$
- $\det(5a_1 + 2a_3, a_3, a_2, a_4)$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ 1-i & 3+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

Determinare una matrice $T \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tr sup ed una $T' \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tr inf con lo stesso determinante di A.
