V sp vett su $\mathbb{R}$ con ps | anche non di tipo finito.
o sp vett su $\mathbb{C}$ con ph

• Vettori ortogonali ad un sottospazio.

W ssv di V, $v \in V$:

def | SE $\forall w \in W$, $v \perp w$ (ovvero $v \cdot w = 0$)
ALLORA: v si dice ortogonale a W ($v \perp W$)

Oss: SE W di tipo finito; $w_1, \dots, w_k$ fam finita di gen di W,
ALLORA $\boxed{v \perp W \Leftrightarrow v \perp w_1, \dots, v \perp w_k}$

• Proiez ortogonale e componente normale rel a sottospazio t.f.

W ssv di tipo finito di V, $v \in V$

TEO: $\boxed{\exists !\ v' \in W,\ h \perp W \text{ t.c. } v = v' + h}$

v': proiez ortog...
h: comp normale... di v rel a W

• SE $W = \{0\}$ ALLORA $v' = 0$, $h = v$ sono i vett cercati

• SE $\dim W \geq 1$ ALLORA ...

Oss (esistenza di basi on di W – procedura di GRAM-SCHMIDT)

• $w_1, \dots, w_k$ base di W ($\exists$ perché W è t.f.)

• sono determ univocam i coeff $t_{ij} \in \mathbb{R}$ (o $\in \mathbb{C}$...) t.c. i vettori

$$p_1 = w_1$$
$$p_2 = w_2 - t_{21} p_1$$
$$\vdots$$
$$p_k = w_k - (t_{k1} p_1 + \dots + t_{k,k-1} p_{k-1})$$

| sono elem non nulli e ortogonali

Es: w_1, w_2, w_3 base di W

1) $p_1 = w_1$ ($\neq 0$ perché ...)

2) $(w_2 - t_{21} p_1) \cdot p_1 = w_2 \cdot p_1 - t_{21} \underbrace{(p_1 \cdot p_1)}_{\neq 0}$

e: $= 0 \Leftrightarrow t_{21} = \dfrac{w_2 \cdot p_1}{p_1 \cdot p_1}$; $p_2 = w_2 - t_{21} p_1$ ($\neq 0$...)

3) $(w_3 - t_{31} p_1 - t_{32} p_2) \cdot p_1 = w_3 \cdot p_1 - t_{31}(p_1 \cdot p_1) - \cancel{t_{32}\, p_2 \cdot p_1}$

$(w_3 - t_{31} p_1 - t_{32} p_2) \cdot p_2 = w_3 \cdot p_2 - \cancel{t_{31}(p_1 \cdot p_2)} - t_{32}\, p_2 \cdot p_2$

e: entrambi $= 0 \Leftrightarrow$ $t_{31} = \dfrac{w_3 \cdot p_1}{p_1 \cdot p_1}$

$t_{32} = \dfrac{w_3 \cdot p_2}{p_2 \cdot p_2}$

• i vettori $q_1 = \dfrac{p_1}{\|p_1\|}, \dots, q_k = \dfrac{p_k}{\|p_k\|}$

sono DI NORMA UNITARIA e ORTOGONALI A COPPIE

ovvero sono una BASE ORTONORMALE di W.

• SE $\dim W \geq 1$ ALLORA ...

sia $q_1, \dots, q_k$ una base on di W;

cerchiamo $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ (o $\in \mathbb{C}$...) t.c.

posto $v' = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_k q_k$

e $h = v - v'$

sia $h \perp W$ (ovvero $h \cdot q_1 = \dots = h \cdot q_k = 0$)

Si ha: $h \cdot q_1 = (v - v') \cdot q_1 = 0 \iff v \cdot q_1 = v' \cdot q_1$

ovvero:

$$h \cdot q_1 = 0 \iff v \cdot q_1 = (\alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_k q_k) \cdot q_1$$

$$\iff \alpha_1 = v \cdot q_1$$

Ripetendo i calcoli: $h \cdot q_2 = 0 \iff \alpha_2 = v \cdot q_2$

$$\vdots$$

$$h \cdot q_k = 0 \iff \alpha_k = v \cdot q_k$$

Dunque: esistono e sono univocam determinati <u>LA</u> pr ort di v su W e <u>LA</u> comp normale di v relativa a W.

<u>Oss</u>: $F : W \to \mathbb{R}$ def da $F(x) = \| v - x \|^2$

<u>Allora</u>: $\forall x \in W$ t.c. $x \neq$ pr ort di v su W

si ha $F(x) > F($pr ort di v su $W)$

ovvero: <u>la proiez ort di v su W è il vettore che rende minimo il valore di F.</u>

<u>Es</u>: In $\mathbb{R}^4$ con ps canonico, sia

$$W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

- determ una base on di W
- determ pr ort e comp normale di $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ su W.

<u>Es</u>: In $\mathbb{R}^4$ con ps canonico, sia $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Provare che $W = \{ x \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } x \perp v \}$ è ssv di $\mathbb{R}^4$;
- determ una base o n di W

<u>Es</u>: Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'appl $\mathbb{R}$-lin t.c.

$$g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- decidere se $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia base di $\mathbb{R}^3$
- determinare $g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- determinare $G \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ t.c. $g = L_G$.

<u>Es</u>: Sia $\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'appl $\mathbb{R}$-lin. Decidere se

- $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \left\langle \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\,\alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Es</u>: E' corretto scrivere

$$\mathbb{C}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \ ?$$