def: $\mathbb{R}^{n\times n}$ sp vett su $\mathbb{R}$

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ <u>SIMMETRICA</u> se $A^T = A$

Es: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \\ 1 & x & 3 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$ è simm $\forall x \in \mathbb{R}$ ...

Oss: • $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ è simm se e

solo se $a_{21} = a_{12}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$, ovvero

se e solo se:
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

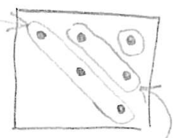
In tal caso si ha:

$$A = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{33}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$$
$$+ a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ogni comb lin a coeff in $\mathbb{R}$ delle sei matrici... è una matrice simmetrica...
- ... ovvero:

S_3 = s.s.v. di $\mathbb{R}^{3\times 3}$ delle matr simmetriche

e $\dim S_3 = 3 + 2 + 1 = 6$



def • $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ <u>ANTISIMMETRICA</u> se $A^T = -A$

Es: $A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$ è antisimm $\Leftrightarrow$ $\alpha = \delta = 0$, $\gamma = -\beta$.

Oss: • $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ è antisimm se e

solo se $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, $a_{12} = -a_{21}$, $a_{13} = -a_{31}$, $a_{23} = -a_{32}$.

In tal caso si ha:

$$A = a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ogni comb lin a coeff in $\mathbb{R}$ delle tre matrici... è una matrice antisimmetrica...
- ... ovvero:

S'_3 = s.s.v di $\mathbb{R}^{3\times 3}$ delle matrici antisimm

e $\dim S'_3 = 2 + 1 = 3$

Es: In $\mathbb{R}^{4\times 4}$
- indicare una base e la dimensione di S_4 e di S'_4.

TEO: Si ha

(I) $\mathbb{R}^{n\times n} = S_n \oplus S'_n$

(II) $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$\frac{1}{2}(A + A^T) \in S_n$, $\frac{1}{2}(A - A^T) \in S'_n$

e $\frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = A$

dim (II) vero (si verifica) e $\Rightarrow \mathbb{R}^{n\times n} = \mathcal{S}_n + \mathcal{S}'_n$.
Inoltre, se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $S \in \mathcal{S}_n$ e $Z \in \mathcal{S}'_n$ t.c. $S+Z = A$ allora, $S = \frac{1}{2}(A+A^T)$ e $Z = \frac{1}{2}(A-A^T)$
ovvero: la somma è diretta.

Es: Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Determinare S simm e S' antisimm t.c. $S+S' = A$.

---

def: $\mathbb{C}^{n\times n}$ sp vett su $\mathbb{C}$

- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è HERMITIANA se $A^H = A$

Es: $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ non è hermitiana,

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ non è hermitiana,

$C = \begin{bmatrix} -3 & 1+i \\ 1-i & 62 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ è hermitiana.

Oss: • $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ è hermitiana se e solo se $a_{11}, a_{22}, a_{33} \in \mathbb{R}$ e $a_{31} = \overline{a_{13}}$, $a_{21} = \overline{a_{12}}$, $a_{32} = \overline{a_{23}}$

- $\mathcal{H}_n$ = ins delle matrici hermitiane in $\mathbb{C}^{n\times n}$ ...

* NON È ssv di $\mathbb{C}^{n\times n}$ ($0 \in \mathcal{H}_n$; $c_1, c_2 \in \mathcal{H}_n \Rightarrow c_1 + c_2 \in \mathcal{H}_n$, $c_1 \in \mathcal{H}_n$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha c_1 \in \mathcal{H}_n$ ma...)

* se si cons $\mathbb{C}^{n\times n}$ come sp vett su $\mathbb{R}$; $\mathcal{H}_n$ è ssv...

def: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è ANTIHERMITIANA se $A^H = -A$.

Es: $A = \begin{bmatrix} 1+i & i \\ -i & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ non è antiherm;

$A = \begin{bmatrix} 3 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ non è antiherm

$A = \begin{bmatrix} 6i & -1+i \\ 1+i & 5i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ è antiherm

Oss: • $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ è antiherm se e solo se a_{11}, a_{22}, a_{33} hanno parte reale zero e $a_{21} = -\overline{a_{12}}$, $a_{31} = -\overline{a_{13}}$, $a_{32} = -\overline{a_{23}}$

- $\mathcal{H}'_n$ = ins delle matrici antihermitiane in $\mathbb{C}^{n\times n}$ ...

* NON È ssv di $\mathbb{C}^{n\times n}$ (come sp vett su $\mathbb{C}$)

* è ssv di $\mathbb{C}^{n\times n}$ come sp vett su $\mathbb{R}$.

TEO: Sia $\mathbb{C}^{n\times n}$ sp vett su $\mathbb{R}$. Si ha

(I) $\mathbb{C}^{n\times n} = \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}'_n$

(II) $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

$$\frac{1}{2}(A+A^H) \in \mathcal{H}_n, \quad \frac{1}{2}(A-A^H) \in \mathcal{H}'_n$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 3 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, determ S hermitiana e S' antihermitiana t.c. $S+S' = A$.

Es: $\mathbb{C}^{2\times 2}$ come sp vett su $\mathbb{R}$. Verif che:

- $\mathbb{R}^{2\times 2}$, $i\mathbb{R}^{2\times 2} = \{ iM, M \in \mathbb{R}^{2\times 2} \} \subset \mathbb{C}^{2\times 2}$

  sono s.s.v di $\mathbb{C}^{2\times 2}$

- $\begin{pmatrix} 4-i & 2+i \\ 6i & 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$

- $\forall A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, $\exists!\, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ t.c. $A = B + iC$

- $\mathbb{C}^{2\times 2} = \mathbb{R}^{2\times 2} \oplus i\mathbb{R}^{2\times 2}$

- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^{2\times 2} = 2 \cdot (2^2)$

- $A = \underbrace{B + iC}_{\in \mathbb{R}^{2\times 2}} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

  * $A^H = B^T - iC^T$
  * A è hermitiana
    $\Leftrightarrow$ B è simm
    C è antisimm
  * A è antihermitiana
    $\Leftrightarrow$ B è antisimm
    C è simmetrica

- $\mathcal{H}_2 = \mathcal{S}_2 \oplus i\mathcal{S}'_2$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}_2 = 3 + 1 = 4$

- $\mathcal{H}'_2 = \mathcal{S}'_2 \oplus i\mathcal{S}_2$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}'_2 = 1 + 3 = 4$
