
TEO: sono equivalenti gli asserti

- la somma $V_1 + \dots + V_s$ è diretta
- se $v_1 \in V_1, \dots, v_s \in V_s$ sono t.c. $v_1 + \dots + v_s = 0$
  allora $v_1 = \dots = v_s = 0$
  (zero, come elem di $V_1 + \dots + V_s$ si rappres solo come $0 + \dots + 0$)
- $\dim(V_1 + \dots + V_s) = \dim V_1 + \dots + \dim V_s$
- base $V_1 + \dots + V_s$ = base $V_1, \dots,$ base V_s

Es: è corretto scrivere $\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \right\rangle$?

Occorre verif che

1) la somma è diretta

[$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ è base … ; $\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ è base …
$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ è base …]

2) $\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \right\rangle$

Es: V ssv di $\mathbb{C}^{10}$, $\dim V = 7$; $v_1, \dots, v_7$ base di V

È corretto scrivere

$$V = \langle v_1, v_2 \rangle \oplus \langle v_3, v_4 \rangle \oplus \langle v_5, v_6, v_7 \rangle \ ?$$

Es: Indicare V, W ssv di $\mathbb{C}^3$ t.c.

$$\mathbb{C}^3 = V \oplus W \ ; \quad \dim V \neq 0 \ , \quad \dim W \neq 0$$

Es: In $\mathbb{R}^2$ si cons l'ins A descritto parametricam da

$$x = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- determ una descriz cartesiana di A;
- descrivere geometricamente l'ins A.

Sol: La descr param è: $\begin{cases} x_1 = 5+3t \\ x_2 = 4-6t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

Una descriz cartesiana si ottiene individuando per quali $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ il sist precedente ha soluzione.

$$\begin{cases} 3t = x_1 - 5 \\ -6t = x_2 - 4 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{è equiv}$$

$$\text{a}: \begin{cases} 3t = x_1 - 5 \\ 0 = 2x_1 + x_2 - 14 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

che ha soluzioni $\Leftrightarrow$ $\boxed{2x_1 + x_2 = 14}$

L'equaz cartesiana ottenuta si riscrive, ad es:

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} \qquad (\text{ps canonico})$$

ovvero:

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \cdot \left(x - \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} \right) = 0$$

Utilizz una rappres di $\mathbb{R}^2$ su un piano α, e posto

$$n \equiv \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \text{ vettore}$$

$$P \equiv \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}, \text{ punto}$$

A risulta rappres dalla retta per P perp ad n, ovvero, constatato che $n \cdot \begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix} = 0$, dalla retta per P parallela al vett di coordinate $\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$.

Es: L punto dello spazio, $\alpha \ni L$ piano, $\mathcal{B}$ base on di α_L.

- Determ una descriz param della retta di α per $B \equiv \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ parallela al vettore $v \equiv \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
- Dedurne una descriz cartesiana.

Es: In $\mathbb{R}^3$ si cons l'ins F descritto param da:

$$x = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

- determinare una descriz cartesiana di F della forma:
  $$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = a \qquad (n_1, n_2, n_3, a \in \mathbb{R})$$
- Con riferim ad una rappres geometrica di $\mathbb{R}^3$, descrivere F come piano per il punto di coordinate $\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ ed ortogonale ad un opportuno vettore.

Risp: una descriz cartesiana è $x_1 - x_2 + x_3 = 3$

che equivale a $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ (ps canonico)

ovvero a: $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \cdot \left(x - \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \right) = 0$.

Posto $A \equiv \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ e $n \equiv \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, F risulta il piano per A perpendicolare ad n.